

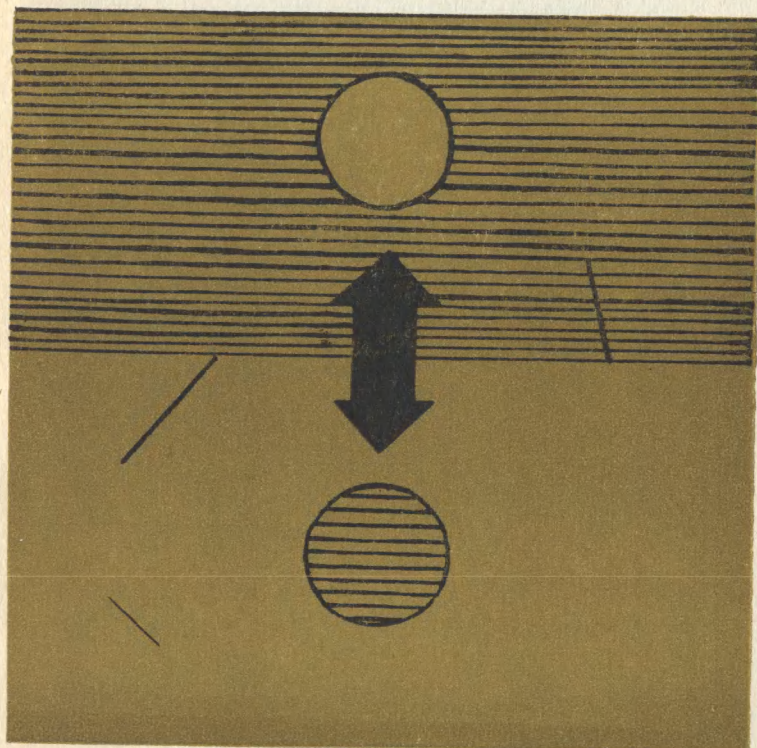
Математика

Библиотечка

физико-математической школы

М.И. Башманов

Уравнения и неравенства



Математика

**Библиотечка
физико-математической школы**

Выпуск 5

М. И. Башмаков **Уравнения
и неравенства**

**Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы
Москва 1971**

512
Б 33
УДК 512

Математика Библиотечка
физико-математической школы

Редактор серии
И. М. Гельфанд

2-2-2
129-71

«Какой в этом смысл?» — спросил Кролик. — «Ну, — сказал Пух, — мы все время ищем Дом и не находим его. Вот я и думаю, что если мы будем искать эту Яму, то мы ее обязательно найдем, и тогда мы, может быть, найдем то, чего мы как будто не ищем, а оно-то, есть то, что мы на самом деле ищем».

А. Милн, Винни-Пух и все остальные, гл. XV.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решить уравнение, решить неравенство... С этим сортом задач мы сталкиваемся очень часто. Пишем подряд какие-то формулы, радуемся, когда они становятся проще и проще, наконец, видим желанное равенство, например $x = 100$, и объявляем, что уравнение решено. Это напоминает прополку грядки человеком, которому не сказали, что на ней должно расти.

Цель этой книжки — помочь научиться пропалывать грядку так, чтобы все нужное оставить, а все лишнее — выдернуть. Сначала мы познакомимся со всеми растениями, которые будут расти на нашей грядке, научимся их быстро узнавать, классифицировать, удобно обозначать. Этому посвящена довольно длинная вводная глава. Затем мы попробуем точно сформулировать, чего же мы добиваемся, что мы понимаем под словами «решить уравнение», «решить неравенство» и т. п., обдумаем смысл тех операций, тех преобразований, которые мы используем для достижения цели.

Все это вместе довольно легко, потому что сложной теории здесь нет, большая часть книжки состоит просто из

примеров. С другой стороны, хотя заниматься мы будем самыми привычными вещами, иногда привычки придется ломать и создавать новые.

Круг рассмотренных вопросов намеренно ограничен — разбираются почти исключительно алгебраические уравнения и неравенства, совсем мало места отведено интересным и важным задачам, касающимся доказательства неравенств, которые, как мы надеемся, будут включены в одну из книжек этой серии.

Книжка носит ярко выраженный «технический» характер. В ней много задач, требующих только хорошего владения школьным материалом, близких к конкурсным задачам при поступлении в институт. Примеры, показываемые в тексте, требуют внимательного разбора с карандашом в руке.

Книга рассчитана на школьников 9—10 классов, учителей и лиц, самостоятельно занимающихся математикой.

Я глубоко благодарен Н. Б. Васильеву, Д. А. Владимирову, В. Л. Гутенмахеру, Ю. И. Ионину, Д. К. Фаддееву, прочитавшим рукопись и много сделавшим для ее улучшения.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Числа

В этой книге мы всюду имеем дело с вещественными числами. Мы не будем здесь давать определение, что называется вещественным числом. Вместо этого просто перечислим те свойства чисел, которыми мы пользуемся.

Что же мы обычно делаем с числами?

Прежде всего, мы совершаем арифметические действия — сложение и умножение, с помощью которых мы можем из двух чисел получить третье — их сумму или произведение.

Эти действия обладают рядом свойств. Основными свойствами сложения являются следующие:

1. $a + b = b + a$ — *переместительный*, или *коммутативный*, закон сложения.

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — *сочетательный*, или *ассоциативный*, закон сложения.

3. Существует особое число 0 (нуль) такое, что для любого числа a справедливо равенство $a + 0 = a$.

4. Для любого числа a существует *противоположное* число $(-a)$ такое, что их сумма равна числу 0, т. е.

$$a + (-a) = 0.$$

Последнее свойство позволяет определить *обратное* действие — вычитание. *Вычитание* из числа a числа b определяется как сложение числа a с числом $(-b)$, противоположным числу b .

Умножение обладает свойствами, очень похожими на свойства сложения. Именно:

5. $ab = ba$ — *переместительный*, или *коммутативный*, закон умножения.

6. $(ab)c = a(bc)$ — *сочетательный*, или *ассоциативный*, закон умножения.

7. Существует особое число 1 (единица) такое, что для любого числа a справедливо равенство $a \cdot 1 = a$.

8. Для всякого числа a , отличного от числа 0, существует обратное число $a^{-1} = 1/a$ такое, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

С умножением тесно связано обратное действие — деление. Деление числа a на число b , отличное от нуля, определяется как умножение числа a на число $1/b$, обратное к числу b .

Сложение с умножением связано так называемым распределительным, или дистрибутивным, законом:

$$9. (a + b) c = ac + bc.$$

Число 0 по отношению к действиям умножения и деления является исключительным. Произведение любого числа на нуль равно нулю. Деление же на нуль не имеет смысла (не определено).

Важным свойством умножения является следующее: если произведение двух чисел равно нулю, то хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Множество всех вещественных чисел удобно представлять себе как множество всех точек некоторой прямой (числовой оси). Это соответствие между числами и точками числовой оси при обучении математике не менее существенно, чем, например, соответствие между буквами и звуками при обучении чтению. Оно лежит в основе языка, на котором излагаются целые главы математики. Этот язык настолько привычен, что мы часто вместо слова «число» говорим «точка» и наоборот.

Напомним, что для того, чтобы каждая точка оси была изображением некоторого числа, одних рациональных чисел оказывается недостаточно. Для того чтобы сплошь заполнить числами всю прямую, к множеству рациональных чисел присоединяют новые, иррациональные числа. Вместе все эти числа, рациональные и иррациональные, носят название *вещественных* или *действительных* чисел.

В этом «полном» множестве вещественных чисел уже можно определять такие операции, как извлечение корня, возведение в произвольную степень, взятие логарифма (правда, все эти операции безоговорочно выполнимы только для положительных чисел) и другие. Остановимся коротко на операции извлечения корня, которая необходима при решении алгебраических уравнений.

Примем без доказательства, что для любого *положительного* числа a существует единственное *положительное*

число b такое, что $b^n = a$ (здесь n — любое натуральное число). Очевидно, $b^n = 0$ тогда и только тогда, когда $b = 0$. Отсюда следует, что из любого неотрицательного числа можно извлечь корень с любым натуральным показателем, причем единственным образом, если ограничиться неотрицательным значением. Этот (единственный неотрицательный) корень обозначается так: $\sqrt[n]{a}$.

Если n нечетно, то для всякого числа a существует единственное вещественное число b такое, что $b^n = a$. Для него сохраняется то же обозначение: $\sqrt[n]{a}$.

Итак, $\sqrt[n]{a}$ обозначает: для четного n и неотрицательного a — единственный неотрицательный корень n -й степени из a ; для нечетного n — единственный существующий корень, знак которого совпадает со знаком a .

Кроме операций над числами нам приходится рассматривать отношения между ними — отношение равенства (совпадают они между собой или нет) и отношение порядка, или, как мы будем часто говорить, отношение «больше — меньше».

То, что a больше b , будем записывать так: $a > b$. Для любых двух чисел верно одно и только одно из трех: 1) $a > b$, 2) $a = b$, 3) $b > a$. Можно писать и так: $a < b$ (a меньше b), причем, разумеется, a меньше b в тех и только тех случаях, когда b больше a , так что ничего нового, кроме некоторого удобства, отношение $a < b$ не дает.

Употребляется также знак \leq . Неравенство $a \leq b$ верно тогда и только тогда, когда верно неравенство $a < b$ или верно равенство $a = b$. Так, в частности, верны неравенства $3 \leq 3$; $3 \leq 5$; $-1 \leq 0$.

Читается неравенство $a \leq b$ так: « a меньше или равно b », или « a не больше b », или « a не превосходит b ». Когда хотят подчеркнуть, что имеются в виду неравенства вида $a > b$, то говорят, что это *строгое* неравенство, а неравенство $a \geq b$ называют *нестрогим* неравенством.

С помощью знака \geq особенно удобно переходить к *противоположному* неравенству: если $a > b$ неверно, то верно, что либо $a = b$, либо $a < b$, т. е. $a \leq b$. Точно так же, если $a \geq b$ неверно, то верно $a < b$.

Отношение порядка между числами очень наглядно представляется геометрически. Если положительное направление оси выбрано слева направо, то точка, соответствующая большему числу, расположена правее. Свойства

отношения «больше — меньше» будут изучены подробно в главе II.

А пока займемся тем, что введем обозначения для некоторых множеств на прямой. Эти множества часто придется рассматривать при решении неравенств и уравнений.

Пусть $a < b$. Все числа x , для которых $a < x < b$ ¹⁾, заполняют отрезок оси с концами в точках a и b (причем сами точки a и b не включаются) (рис. 1).

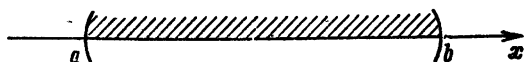


Рис. 1.

Это множество чисел (точек на оси) мы будем обозначать так: $(a; b)$; читается эта запись: отрезок $(a; b)$ или интервал $(a; b)$.

Допустим, что мы хотим записать отрезок $(a; b)$ вместе с его концами (рис. 2), т. е. множество всех чисел x , для

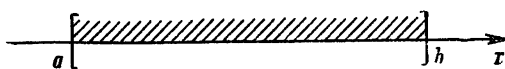


Рис. 2.

которых $a \leq x \leq b$. Для этого отрезка будем применять такое обозначение: $[a; b]$.

С помощью тех же скобок можно записывать и отрезок, в который включен только один из его концов. Нам хоте-

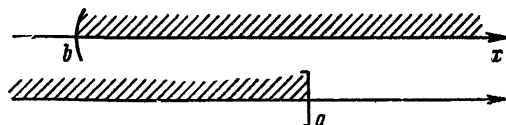


Рис. 3.

лось бы иметь похожую запись и для лучей, т. е. для множеств чисел x такого вида: $x > b$, $x \leq a$ (рис. 3). Для этого введем два значка $-\infty$ и $+\infty$ (читать их будем так:

¹⁾ Читается: « x больше a и меньше b ».

минус бесконечность, плюс бесконечность). Сведем все обозначения в такую таблицу:

Множество всех чисел x , удовлетворяющих условию	Обозначается
$a < x < b$	$(a; b)$
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$
$a < x \leq b$	$(a; b]$
$a \leq x < b$	$[a; b)$
$x < a$	$(-\infty; a)$
$x \leq a$	$(-\infty; a]$
$x > b$	$(b; +\infty)$
$x \geq b$	$[b; +\infty)$

Запомните, что около знаков $-\infty$ и $+\infty$ всегда стоит круглая скобка (этого края у луча нет).

Всю числовую ось, т. е. множество всех вещественных чисел, можно обозначить так: $(-\infty, +\infty)$.

Наконец, если нам захочется рассматривать одновременно два или несколько интервалов, т. е. если потребуется записать множество чисел, заполняющих не один, а два или несколько отрезков, то эти отрезки будем писать не просто рядом, а будем ставить между ними «чашечку» — значок \cup . Так, $[-1; 3] \cup [5; 7]$ обозначает множество чисел, заполняющих два отрезка на числовой оси (рис. 4). Заметим,

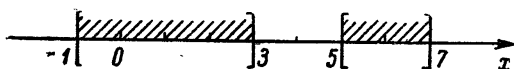


Рис. 4.

что если два отрезка, объединяемые с помощью \cup , налегают друг на друга, то их объединение можно записать в виде одного отрезка, например: $[-3; 2] \cup [0; 5] = [-3; 5]$ (рис. 5).

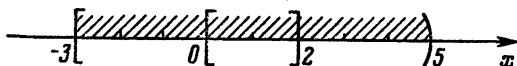


Рис. 5.

Аналогичную операцию можно определить не только над числовыми, но и над произвольными множествами. Пусть X и Y — два множества.

Объединением множеств X и Y называется множество, образованное всеми элементами множеств X и Y вместе. Обозначают объединение так: $X \cup Y$.

Введем еще одно обозначение:

$$x \in (a; b)$$

(читается так: « x принадлежит отрезку $(a; b)$ »). Это означает, что число x берется из отрезка $(a; b)$, т. е. что $a < x < b$. Например, то, что $x \geq 3$, можно записать так: $x \in [3; +\infty)$.

Запись $x \in X$ применяется не только к числам и отрезкам и означает вообще, что x есть элемент множества X . Читается эта запись так: « x принадлежит (множеству) X ».

Итак, мы с вами научились коротко записывать отрезки на числовой оси. Покажем, почему это удобно. Бывает, что, решая неравенства, ученики пишут ответ в таком, например, виде:

$$x > 3, \quad x \leq 5, \quad x < 0.$$

Из такой записи (так же как из рис. 6) совершенно неясно, какое множество чисел считать ответом.

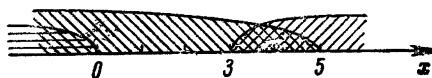


Рис. 6.

Если имеется в виду, что нужны числа x , удовлетворяющие хотя бы одному из написанных неравенств, то

$$x \in (3; +\infty) \cup (-\infty; 5] \cup (-\infty; 0).$$

Очевидно, это будут все действительные числа, так как каждое число попадает хотя бы в один из указанных отрезков. Тогда ответ можно записать так: $X = (-\infty; +\infty)$.

Если же нужны числа, удовлетворяющие одновременно всем трем неравенствам, то это записывается обычно с помощью «перевернутой чашечки»:

$$x \in (3; +\infty) \cap (-\infty; 5] \cap (-\infty; 0).$$

Очевидно, таких чисел не будет вовсе (как говорят, «множество решений пусто»).

Но, может быть ответ такой: x удовлетворяет одновременно первым двум неравенствам, т. е. $x \in (3; +\infty) \cap$

$\cap (-\infty; 5]$, или x удовлетворяет третьему неравенству, т. е. $x \in (-\infty; 0)$. В таком случае (рис. 7) мы пишем

$$X = ((3; +\infty) \cap (-\infty; 5]) \cup (-\infty; 0) = (3; 5] \cup (-\infty; 0).$$

В математике для обозначения множества, состоящего из элементов, принадлежащих одновременно множествам X и Y , употребляется знак \cap : $X \cap Y$ — общая часть (пересечение) множеств X и Y .

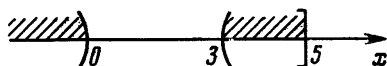


Рис. 7.

Для пустого множества имеется специальное обозначение: \emptyset ; тогда во втором случае ответ можно записать так: $X = \emptyset$. Приведем еще один пример пустого множества: множество жирафов в Антарктиде (в настоящий момент).

Подробнее об операциях над множествами, некоторых парадоксальных свойствах бесконечных множеств и многих других интересных вещах вы можете прочитать в книге Н. Я. Виленина «Рассказы о множествах», изд. 2-е, «Наука», 1969.

УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Операции сложения и умножения выполнимы во множестве всех целых чисел, а также во множестве рациональных чисел. Проверьте, что свойства 1—7, 9 верны для множеств целых чисел и рациональных чисел, а свойство 8 — только для множества рациональных чисел.

1.2. Докажите, что во множестве рациональных чисел не найдется такого числа b , что $b^2 = 2$.

1.3. На числовой оси покажите отрезки, соответствующие следующим условиям, и запишите их с помощью введенных обозначений:

а) $1 \leq x \leq 5$, б) $x > 7$; в) $0 < x \leq 3$; г) $x \leq -1$.

1.4. На числовой оси изобразите следующие множества:

а) $(-3; 5] \cup (6; 7]$; б) $(-\infty; 1] \cup (0; 2]$;

в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $[-2; -1] \cup [-1; 3] \cup [3; 4)$.

Там, где это возможно, запишите полученные множества короче.

1.5. Обозначьте на числовой оси множества чисел, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

а) $x > 0$, $x \leq 5$, $3 < x \leq 7$;

б) $3 < x \leq 2$, $-1 < x \leq 5$;

в) $3 < x$, $x < 5$, $0 \leq x < 3$;

г) $x \in (-3; -1]$, $x \in (-2; +\infty)$.

Запишите результат с помощью введенных обозначений. (Например, он может выглядеть так: $X = (-\infty; 3] \cup (5; 6)$.)

§ 2. Высказывания

До сих пор мы рассматривали некоторые понятия и удобные обозначения, касающиеся числовых множеств. А теперь поговорим о понятиях и обозначениях, связанных с логическими рассуждениями, которые мы проводим при решении уравнений, неравенств и вообще при решении разных математических задач и доказательстве теорем.

Эти рассуждения формулируются в виде каких-то утверждений, высказываний. Вот примеры самых простых математических высказываний:

1) $2 \cdot 2 = 4$;

2) $2 \cdot 2 > 9$;

3) 1649 делится на 17;

4) треугольник со сторонами 3, 5, 7 имеет ось симметрии.

Высказывания могут быть верными и неверными. Так, утверждения в первом и третьем примерах верны, истинны, а остальные ложны.

Из одних высказываний можно строить новые с помощью логических союзов. Так, утверждение

$$16 < \sqrt[3]{5000} < 17$$

можно считать составленным из двух утверждений

$$16 < \sqrt[3]{5000} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{5000} < 17$$

с помощью союза *и*, который показывает, что оба утверждения должны выполняться одновременно; на самом деле $\sqrt[3]{5000}$ больше 17, поэтому утверждение $16 < \sqrt[3]{5000} < 17$ неверно. Высказывание

$$\text{число } 313^{841} + 2 \text{ делится на } 727 \text{ или на } 757$$

составлено из высказываний

$$\begin{aligned} &\text{число } 313^{841} + 2 \text{ делится на } 727 \\ &\text{или число } 313^{841} + 2 \text{ делится на } 757 \end{aligned}$$

с помощью союза *или*. Оно будет верно, если верно хотя бы одно из двух составляющих его утверждений; заметим, что верными могут оказаться и оба. Высказывание $5^2 \geq 25$ можно считать составленным из двух: $5^2 > 25$, $5^2 = 25$ с помощью союза *или*. Итак, подчеркнем еще раз: *и*, соединяющее два высказывания, означает, что они должны выполняться оба одновременно — и то, и другое; *или* — что дол-

жно выполняться хотя бы одно из них — или то, или другое (или оба вместе). В обычной речи союзы «и» и «или» не всегда употребляются именно в этом смысле. Когда мы захотим подчеркнуть, что вкладываем в них этот точный смысл, мы будем использовать жирный шрифт.

Многие теоремы имеют такую форму: *если..., то...* Например, *если число $2^{40} + 1$ делится на 51, то оно делится на 17*. Для записи таких утверждений будем употреблять значок \Rightarrow . Так, если обозначить через A первое утверждение ($2^{40} + 1$ делится на 51), а через B — второе ($2^{40} + 1$ делится на 17), то все исходное утверждение можно записать так: $A \Rightarrow B$ — и прочесть: «из A следует B , из A вытекает B , если A , то B » и т. п.

Высказывание $A \Rightarrow B$ считается неверным только в том случае, если A верно, а B неверно: например, высказывания

$$2 = 0 \Rightarrow 0 = 0,$$

$$12 < 6 \Rightarrow 10 < 4,$$

$$25 < 27 \Rightarrow \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$$

верны, а

$$3 < 5 \Rightarrow -3 < -5$$

неверно. Мы скоро увидим, почему такое соглашение удобно.

Часто бывает нужно написать: *из A следует B и из B следует A* , т. е. соединить высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ союзом *и*. Для этого будет употребляться значок \Leftrightarrow (его часто читают так: эквивалентно, равносильно; $A \Leftrightarrow B$ означает, что A выполняется в тех и только тех случаях, когда выполняется B).

Вы, наверно, заметили, что почти во всех наших примерах утверждения относились к конкретным числам (или фигурам) и истинность их можно было проверять, хотя бы в принципе, прямым вычислением. Сила математики состоит в том, что она умеет обращаться с переменными высказываниями.

Можно составить такую заготовку: *число ... делится на 727 или число ... делится на 757*, а затем вместо многоточия подставлять различные целые числа и для них проверять верность получившегося утверждения. Вместо многоточия пишут обычно какую-нибудь букву, скажем x , и считают ее переменной. При этом нужно знать, какие значения может принимать такая переменная.

Приведем примеры высказываний с переменными ¹⁾.

1) Пусть x и y — натуральные числа; если xy делится на 6, то x делится на 6 или y делится на 6.

Нам сказано, какие числа можно подставлять в это переменное высказывание. При одних значениях переменных может получиться верное высказывание (скажем, при $x = 12$, $y = 3$), а при других — неверное (например, при $x = 2$, $y = 3$).

2) Четырехугольник S является параллелограммом.

Здесь S — переменная; область значений S указана, это — множество всех четырехугольников.

3) Число a делится на 6.

Здесь переменная обозначена буквой a . Следовало, конечно, указать область ее значений. К сожалению, это делают не всегда. Разумно считать в этом примере областью значений a множество всех целых чисел.

4) x — вещественное число; тогда $x > 0 \Rightarrow x > -2$.

5) a и b — вещественные числа;

$$|a| = b \Rightarrow [b > 0 \text{ и } (a = b \text{ или } a = -b)].$$

В последних двух примерах мы получаем верные высказывания при всех значениях переменных (эти примеры оправдывают несколько странное на первый взгляд соглашение о том, что высказывания «ложь \Rightarrow истина» и «ложь \Rightarrow ложь» считаются верными: подставьте в 4) $x = -1$ и $x = -3$).

Читая любую математическую книгу, вы заметите, что в тех случаях, когда следует сказать: «при всех x верно высказывание $A(x)$ », часто говорят: « $A(x)$ при всех x », или « $A(x)$ верно», или даже просто « $A(x)$ »; слова «при всех значениях переменной» и «верно» подразумеваются. Например, говорят просто: «квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов», а не «верно, что для любого прямоугольного треугольника...». Мы тоже иногда будем пользоваться этим привычным сокращением — и уже пользовались им выше, при перечислении свойств вещественных чисел. Обычно из контекста ясно, подразумевается ли, что высказывание верно при всех значениях переменных, или нет.

¹⁾ Термин *высказывание* часто используют только для «*постоянных высказываний*», каждое из которых либо истинно, либо ложно. «*Переменные высказывания*» называют *высказывательными формами*: из такой «*формы*» могут получаться разные конкретные высказывания — и истинные, и ложные — в зависимости от того, что в нее подставить.

Дальше в этой книге нас будут интересовать в основном высказывания, составленные с помощью знаков равенства и неравенства: $=$, $<$, $>$, \leq , \geq , которые верны лишь при некоторых — далеко не при всех — значениях переменных. Переменные в них будут принимать числовые значения.

УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Рассмотрим следующие утверждения:

- A : S — параллелограмм;
 B : S — равнобокая трапеция;
 C : S — ромб;
 D : S — выпуклый четырехугольник;
 E : четырехугольник S имеет ось симметрии;
 F : четырехугольник S имеет центр симметрии;
 G : около S можно описать окружность;
 H : в S можно вписать окружность.

Из них можно составлять другие утверждения с помощью союзов и, или. Например, утверждение D и E означает, что S — выпуклый четырехугольник, имеющий ось симметрии. A или B означает, что S или параллелограмм, или равнобокая трапеция.

а) Укажите, какие утверждения верны ¹⁾, а какие нет:

- 1) $A \Rightarrow F$; 2) $A \Rightarrow H$; 3) $G \Rightarrow D$;
 4) $B \Rightarrow H$; 5) $C \Rightarrow A$; 6) $F \Rightarrow A$;
 7) $H \Rightarrow C$; 8) $F \Rightarrow D$; 9) $E \Rightarrow F$; 10) $G \Rightarrow A$.

б) Придумайте три верных и три неверных утверждения такого же типа.

в) Докажите или опровергните следующие теоремы:

- 1) $F \Leftrightarrow A$; 2) $(B \text{ или } C) \Rightarrow (G \text{ или } H)$;
 3) $(E \text{ и } G) \Rightarrow B$; 4) $(A \text{ и } H) \Rightarrow C$;
 5) $(C \text{ и } G) \Leftrightarrow (F \text{ и } E)$; 6) $(D \text{ и } E) \Rightarrow (G \text{ или } H)$.

2.2. Рассмотрим следующие утверждения:

- $A(a)$: число a делится на 3;
 $B(a)$: число a делится на 2;
 $C(a)$: число a делится на 4;
 $D(a)$: число a делится на 6;
 $E(a)$: число a делится на 12

(всюду идет речь только о целых числах). Укажите, какие из следующих утверждений верны ¹⁾, а какие нет:

- 1) $(A(a) \text{ и } C(a)) \Rightarrow E(a)$;
 2) $(B(a) \text{ и } D(a)) \Rightarrow E(a)$; 3) $(C(a) \text{ и } D(a)) \Rightarrow E(a)$;
 4) $E(a) \Rightarrow (C(a) \text{ и } D(a))$; 5) $E(a) \Rightarrow (B(a) \text{ и } D(a))$;
 6) $A(ab) \Rightarrow (A(a) \text{ или } A(b))$; 7) $C(ab) \Rightarrow (C(a) \text{ или } C(b))$;
 8) $D(ab) \Rightarrow (D(a) \text{ или } D(b))$; 9) $B(n-1) \Rightarrow E(n^3-n)$;
 10) $B(n) \Rightarrow E(n^3+2n)$.

¹⁾ Здесь «верны» означает «верны при всех значениях переменных».

§ 3. Функции

Наиболее важная связь между числовыми переменными описывается с помощью понятия функции.

Задание функции предусматривает задание некоторого множества E (области определения) и правила, которое каждому элементу из E сопоставляет некоторое число. Это сопоставление часто обозначают стрелкой, например:

1) $t \rightarrow t^2$; $t \in [0, +\infty)$; это — функция аргумента t , ее область определения — луч $0 \leq t < +\infty$.

2) $(x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$; $x > 0$, $y < 0$; здесь область определения — некоторое множество пар (x, y) вещественных чисел¹⁾; в этом случае говорят, что задана функция двух аргументов x и y .

Общее математическое понятие *функция* включает и функции, заданные на любых множествах. Вот еще примеры функций:

3) $\triangle \rightarrow S_\triangle$, где \triangle — любой треугольник на координатной плоскости, S_\triangle — его площадь.

4) $A \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{если } A \text{ ложно,} \\ 1, & \text{если } A \text{ истинно,} \end{cases}$ A — любое высказывание, которое можно записать не более чем десятью русскими словами²⁾.

Но в дальнейшем нам будут встречаться только функции числовых аргументов.

Функцию часто обозначают одной буквой, скажем буквой f ; при этом для любого x из области ее определения запись $f(x)$ означает число, которое сопоставляется элементу x , — *значение функции* в точке x .

Например, если f_1 и f_2 — функций из примеров 1) и 2), приведенных выше, то

$$f_1(1) = 1, f_1(\sqrt{5}) = 5, f_2(3, 4) = 5, f_2(0, 1) = 1,$$

$$\text{и вообще } f_1(t) = t^2, f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Функции, заданные на одном и том же множестве, можно складывать и перемножать.

¹⁾ Можно также сказать, что область определения — множество точек (x, y) таких, что $x > 0$, $y < 0$; когда говорят о функциях двух (или трех) переменных, слово «точка» заменяет слова «пара (тройка) чисел» — подразумевается, что речь идет о точках числовой плоскости (пространства).

²⁾ Для точности условимся, что бессмысленные высказывания (скажем, такие: «логарифм минус единицы равен сапогу») мы считаем ложными.

Если f и g — функции, которые определены на множестве E , то их сумма $f + g$ и произведение fg задаются так:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

при каждом $x \in E$.

fg и $f + g$ — это функции с той же областью определения E . Заметьте, что для этих операций сложения и умножения функций выполнены почти все свойства операций над вещественными числами, о которых мы говорили в начале § 1 (а именно, свойства 1 — 7 и 9); роль нуля и единицы играют функции $f_0(x) = 0$ при всех $x \in E$ и $f_1(x) = 1$ при всех $x \in E$.

Подчеркнем еще раз: для того, чтобы полностью определить функцию, нужно знать не только правила вычисления ее значений (скажем, $x \rightarrow x^2$), но и множество, на котором она определена. Например, $x \rightarrow x^2$, $x \in [0, +\infty)$ и $x \rightarrow x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$ — разные функции; про первую из них, определенную на более узком множестве, говорят, что она получается сужением второй функции на множество $[0, +\infty)$.

Наиболее употребительные правила вычисления имеют свои знаки: $+$ (сложение), $\sqrt{}$ (извлечение неотрицательного квадратного корня), \sin (взятие синуса), $[]$ (нахождение целой части), \lg (логарифмирование по основанию 10) и т. п. Комбинируя их, можно получить много новых правил. Например, такая запись:

$$y = \sqrt{\frac{x}{x-1}},$$

означает, что число y вычисляют, исходя из числа x , последовательно выполняя известные уже операции вычитания, деления, извлечения положительного корня.

Часто бывает, что при задании функции указывают только правило вычисления ее значений, не оговаривая специально, на каком множестве функция определена¹⁾. В этом случае считается, что область определения функции состоит из всех чисел, к которым можно применить указанное

¹⁾ Правила вычисления значений функций называют короче *числовыми формами*; например, $\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ — числовая форма. Из такой формы получаются разные числа (или бессмысленные выражения) в зависимости от того, что в нее подставить.

правило (ее называют *естественной областью определения*). Так, записывая функцию в виде $x \rightarrow \sqrt{\frac{x}{x-1}}$, мы считаем ее областью определения множество

$$E = (-\infty; 0] \cup (1; +\infty).$$

Конечно, нечеткость слов «можно применить правило» вызывает иногда путаницу. В школьном курсе математики обычно принимаются некоторые твердые соглашения об употреблении математических символов. В то же время еще до сих пор встречаются бессодержательные споры, например, о том, считать ли число $x = -1$ корнем уравнения $x^{x^2} = -1$ или нет. Просто нет четкой договоренности, при каких значениях x запись x^{x^2} «имеет смысл». (Подставьте $x = -1/2$, $x = -\sqrt{2}$ и т. д.)

Правило задания одной и той же функции может быть записано по-разному. Так, функции $x \rightarrow x^2 + 2x + 1$ и $x \rightarrow (x + 1)^2$ совпадают, так как они имеют одну и ту же естественную область определения $(-\infty, +\infty)$, а правило вычисления дает при каждом x один и тот же результат: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Надо быть очень осторожным при преобразованиях записи правила вычисления значений функции. Производя сокращения и приведение подобных членов, можно получить запись, которая применима к более широкому множеству чисел. Например, для функции

$$x \rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x^2}$$

естественная область определения — множество чисел, отличных от нуля. Производя преобразования

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

мы получим запись $x \rightarrow x^2 + 2$, которая имеет смысл уже при всех x . В этих случаях при преобразованиях нужно указывать исходное множество, являющееся областью определения. Это замечание относится к применению всех «опасных» формул, левые и правые части которых имеют смысл при различных множествах значений переменных. Например,

$$a/a = 1, \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

$$\lg ab = \lg a + \lg b, \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1,$$

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Может ли равняться нулю произведение двух функций с областью определения $(0; 1]$, ни одна из которых не равна тождественно нулю?

3.2. В следующих функциях найдите естественную область определения (т. е. множество точек x , в которых выражение, стоящее справа, имеет смысл):

$$\text{а) } y = \sqrt{1-x^2}; \quad \text{б) } y = \sqrt{\frac{1}{x(2-x)}}; \quad \text{в) } y = \sqrt{\frac{1}{x - \sqrt{x}}}.$$

А как бы вы описали естественную область определения следующей функции: $S \rightarrow d_S$, где d_S — расстояние от точки пересечения диагоналей многоугольника S до центра вписанной в S окружности?

3.3. Совпадают ли функции:

$$\text{а) } y = \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} \quad \text{и} \quad y = \sqrt{1+x} + 1,$$

$$\text{б) } y = \frac{x-1}{x^2-1} \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{x+1},$$

$$\text{в) } y = (\sqrt{x})^2 \quad \text{и} \quad y = \sqrt{x^2},$$

$$\text{г) } y = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \quad \text{и} \quad y = \frac{6}{x^2-9},$$

$$\text{д) } y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \quad \text{и} \quad y = \sqrt{x^2+1} + x.$$

Если нет, то как нужно ограничить их естественную область определения (какие сужения функций взять), чтобы они совпадали?

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ

§ 4. Числовые равенства

Возьмем два числа. Поставим между ними знак $=$. Получим высказывание, называемое *числовым равенством*.

Приведем примеры:

1) $2 \cdot 2 = 4$; 2) $2 \cdot 2 = 5$;

3) $(4 + \sqrt{7}) \cdot (4 - \sqrt{7}) = 3^2$;

4) $2^{200} = 10^{30}$;

5) $\pi = 3,14$; 6) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$;

7) $\sqrt{6} + \sqrt{9} + \sqrt{19} = 10$;

8) $\sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$;

9) $\frac{1}{7} = 0,1428561428$; 10) $1917/852 = 2^{1/4}$.

Равенства, как и всякие высказывания, бывают верные и неверные. Равенство $2 \cdot 2 = 4$ — верное равенство; равенство $2 \cdot 2 = 5$ — неверное. Если в двух частях равенства стоят равные числа (они могут быть по-разному записаны), такое равенство будет верным. В двух частях неверного равенства стоят различные числа.

Как правило, мы имеем дело с верными равенствами. Надо было бы только их и называть равенствами, а неверные равенства запретить вообще. Но все-таки трудно обойтись совсем без неверных равенств: часто бывает удобно соединить два числа или выражения знаком $=$ еще до того, как мы проверили, равны они или нет; мы часто проводим рассуждения такого типа: равенство $2^{100} = 10^{30}$ неверное, потому что вытекающее из него равенство $2^{70} = 5^{30}$ неверно (слева стоит четное число, справа — нечетное).

Перечислим некоторые очевидные свойства равенств.

1. Если к двум частям верного равенства прибавить одно и то же число, то получится снова верное равенство.

Это свойство позволяет, в частности, переносить числа из одной части верного равенства в другую с противоположным знаком.

2. Если две части верного равенства умножить на одно и то же число, то получится снова верное равенство.

3. Если две части верного равенства возвести в одну и ту же степень n (n — натуральное число), то получится снова верное равенство.

4. Если к двум частям верного равенства применить одну и ту же функцию f , то получится снова верное равенство.

Применить функцию f к равенству $a = b$ — значит составить новое равенство $f(a) = f(b)$:

$$a = b \Rightarrow f(a) = f(b).$$

Например, применяя к двум частям равенства $a = b$ функции

$$x \rightarrow |x|, \quad x \rightarrow \sqrt[3]{x}, \quad x \rightarrow x + 6,$$

получим соответственно равенства

$$|a| = |b|, \quad \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}, \quad a + 6 = b + 6.$$

Конечно, мы предполагаем, что функция f определена при $x = a$, $x = b$. Например, переход от равенства $a = b$ к равенству $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$ имеет смысл (для вещественных чисел) только при неотрицательных a и b .

1'. Если к двум частям неверного равенства прибавить одно и то же число, то получится снова неверное равенство.

Докажем это, используя свойство 1. Предположим противное. Пусть в результате прибавления числа a получено верное равенство. Тогда, прибавив к обеим его частям число $(-a)$, получим исходное равенство. По свойству 1 это равенство должно получиться верным, что противоречит условию.

Свойства, аналогичные свойствам 2, 3, 4, для неверных равенств могут и не иметь места. Например, умножая обе части неверного равенства $2 \times 2 = 5$ на одно и то же число 0, получим верное равенство $0 = 0$. Или, возводя в квадрат неверное равенство $2 = -2$, получим верное равенство $4 = 4$.

Про какие же операции можно утверждать, что они переводят неверное равенство в неверное? Из доказательства свойства 1' видно, что это выполняется, например, тогда, когда можно однозначно совершить *обратную* операцию ¹⁾. В приведенных примерах рассмотренные операции — умножение на 0, возведение в квадрат — не имеют однозначно определенных обратных.

Полезно иметь в виду такие свойства неверных равенств:

2'. Если две части неверного равенства умножить на одно и то же число, отличное от 0, то равенство остается неверным.

3'. Если в двух частях неверного равенства стоят положительные числа, то после возведения его в степень n равенство останется неверным.

Чтобы сформулировать еще одно более общее свойство, нам понадобится понятие *монотонной* функции. Напомним, что если для любых x и y из области определения функции f

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y),$$

то функция f называется возрастающей; если

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

— убывающей. Все такие функции — возрастающие и убывающие — вместе называются *строгими монотонными*. (Слово *строга* подчеркивает, что равенство $f(x) = f(y)$ не допускается.)

4'. Если к двум частям неверного равенства применить строго монотонную функцию, то оно останется неверным.

УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Какие из равенств 6) — 10), приведенных в начале параграфа, верны?

4.2. Докажите свойства 2', 3', 4', используя свойства 2, 3 и 4.

4.3. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что $2 = 3$.

Рассмотрим равенство $a = b + 1$. Умножим обе части на $(a - b)$:

$$a^2 = ab = ab + a - b^2 = b.$$

Преобразуем: $a^2 + b^2 = 2ab + a - b$. Подставим $a = b = 2$. Получим $4 + 4 = 4 + 2 + 2$. Это — верное равенство, значит, и исходное при $a = b = 2$ должно быть верным:

$$2 = 2 + 1.$$

¹⁾ См. упр. 4.5.

4.4. Рассмотрим такое утверждение: $a \neq b$ (a не равно b). Оно верно тогда, когда неверно утверждение $a = b$, и наоборот.

Выясните, верны ли утверждения:

- а) $a^2 \neq b^2 \Rightarrow a \neq b$;
- б) $a^3 \neq b^3 \Rightarrow a \neq b$;
- в) $a^3 \neq b^3 \Rightarrow a^2 \neq b^2$.

Вы, наверное, заметили, что от высказываний вида $a \neq b$ удобно переходить к обычному равенству. Проверая, например, правильность нашего первого утверждения (а), можно было рассуждать так: пусть $a \neq b$ неверно; значит, $a = b$, а тогда $a^2 = b^2$, и мы получили противоречие с данным утверждением $a^2 \neq b^2$. Таким образом, высказывание $a^2 \neq b^2 \Rightarrow a \neq b$ — это точно то же самое, что высказывание $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$. Проверьте с такой точки зрения ваше решение примеров а) б), в) ¹⁾.

Проверьте верность утверждений:

- г) $(a^3 + b^3 + c^3 = 0 \text{ и } abc \neq 0) \Rightarrow a + b + c \neq 0$;
- д) $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 1 \Rightarrow (a + b \neq 0 \text{ и } a + c \neq 0)$;
- е) $(a \neq -b \text{ и } b \neq -c \text{ и } c \neq -a) \Rightarrow 1/a + 1/b + 1/c \neq 1/(a + b + c)$.

4.5. Пусть f — любая функция и M — множество всех ее значений. Назовем функцию f *обратимой*, если для любых x_1 и x_2 из ее области определения

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

т. е. если она переводит неверное равенство в неверное.

Проверьте, что следующее правило:

каждому y ставится в соответствие x такое, что $f(x) = y$, задает на множестве M функцию в том и только в том случае, если f обратима. (Эта функция на M называется обратной функцией к f .)

§ 5. Уравнения

Возьмем две функции f и g , заданные на одном и том же числовом множестве E . Если мы для некоторого числа a из множества E вычислим значения функций $f(a)$ и $g(a)$ и приравняем их, то получим числовое равенство. Если же мы соединим знаком $=$ записи $f(x)$ и $g(x)$, где x — переменная (буква), то получим *уравнение*: $f(x) = g(x)$.

Таким образом, можно считать, что уравнение — высказывательная форма (см. сноску на стр. 14), точнее, «форма для числовых равенств». При подстановке вместо x числового значения получается числовое равенство — верное или неверное.

¹⁾ В математике вместе с утверждением A часто рассматривается противоположное утверждение \bar{A} , читающееся: « A неверно». A верно тогда, когда \bar{A} неверно, и наоборот.

Употребляя противоположное высказывание, можно наше утверждение записать так: высказывание $A \Rightarrow B$ равносильно высказыванию $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$, т. е. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$.

Этот логический закон полезно запомнить.

Примеры:

- 1) $x(x+1) = x^2 + 5, x \in (-\infty; +\infty)$;
- 2) $3x = 2x - 3, x \in [0; +\infty)$;
- 3) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, x - \text{любое}$;
- 4) $x^2 + 1 = x^2 + 2, x - \text{любое}$.

В этих примерах рядом с уравнением указана область определения функций, составляющих это уравнение (в этой книге будем рассматривать только функции вещественного аргумента и, следовательно, искать только вещественные корни уравнений).

Если рядом с уравнением не указывается специально область определения входящих в него функций, то естественно считать, что область определения уравнения (ее иногда называют *областью допустимых значений*) — множество всех значений аргумента, при которых определены функции, составляющие уравнение.

Например, у уравнения

$$5) \sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{-x}$$

областью определения является множество $E = [-3; 0]$.

Мы всегда считаем, что функции, входящие в уравнение, имеют одну и ту же область определения E (которая и называется *областью определения уравнения*).

Часто нужно составлять уравнения с помощью двух функций, имеющих разные естественные области определения, скажем A и B . Тогда сначала сужают области определения этих функций и получают новые функции, заданные на новом множестве $E = A \cap B$, но с прежними правилами вычисления значений.

Например, уравнение 5) составлено из функций

$$x \in [-3; 0], \quad x \rightarrow \sqrt{x+3}$$

и
$$x \in [-3; 0], \quad x \rightarrow 1 + \sqrt{-x}.$$

Приведем еще примеры уравнений:

- 6) $a^2 + ab + b^2 = (a+b)^2$;
- 7) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$;
- 8) $x^2 + y^2 = z^2$, где $z \leq 0$;
- 9) $x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$;
- 10) $\sqrt{x^2 - y} = 1 - x$.

В этих примерах функции, образующие уравнения, являются функциями нескольких аргументов. *Областью определения* такого уравнения называется множество наборов значений аргументов, при которых определены все функции, составляющие уравнение. Например, естественная область определения уравнения 10) — множество пар (x, y) таких, что $x^2 \geq y$.

Аргументы функций, составляющих уравнение, часто называют *неизвестными*. Если в обеих частях уравнения стоят функции одного и того же аргумента, то говорят, что задано уравнение с одним неизвестным. Уравнение 5) — это уравнение с одним неизвестным, а уравнение 8) — это уравнение с тремя неизвестными.

Числовое равенство можно считать уравнением, образованным функциями, принимающими постоянное значение.

Решением уравнения с одним неизвестным называется значение неизвестного, при котором уравнение превращается в верное числовое равенство.

Соответственно *решением уравнения с несколькими неизвестными* называется набор значений неизвестных, при подстановке которых в уравнение оно превращается в верное числовое равенство. Часто решения уравнения с одним неизвестным называют *корнями* уравнения.

Например, $x = 5$ является корнем уравнения 1), $x = -100$ является корнем уравнения 3), пара чисел $(5; 0)$, т. е. $a = 5, b = 0$, является решением уравнения 6).

Следует обратить внимание на то, что, по определению, решениями могут быть лишь такие значения неизвестных, которые можно подставить в уравнение, т. е. которые принадлежат области определения функций.

Например, тройка чисел $(3; 4; 5)$ не является решением уравнения 8), так как в нем стоят ограничения $z \leq 0$. Аналогично, $x = -3$ не является корнем уравнения 2).

Решить уравнение — это значит найти все его решения, или, как мы будем говорить, найти множество его решений.

Тождеством называют уравнение, множество решений которого совпадает с областью определения входящих в него функций; иначе говоря, тождество — это уравнение, превращающееся в верное числовое равенство при всех допустимых значениях аргументов.

Например, уравнения 3) и 9) — тождества. Всякое верное числовое равенство является тождеством. Все «опасные формулы», о которых мы говорили во введении (стр. 18), тоже тождества.

В некоторых книгах для таких уравнений вводят специальный термин *квазитождества* (латинская приставка «quasi» означает «вроде», «якобы»), а название *тождество* сохраняют лишь для тех «абсолютных тождеств» $f(x) = g(x)$, у которых естественные области определения левой и правой части — функций f и g — полностью совпадают.

Как записывается множество решений уравнения? У уравнения с одним неизвестным, как правило, множество решений конечно, и мы можем записывать его в виде

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

(в фигурных скобках перечислены все решения уравнения). Если решений нет, то будем писать $X = \emptyset$ — множество решений пусто. Одно уравнение с несколькими неизвестными имеет, как правило, бесконечное множество решений. С такими уравнениями мы встретимся еще в § 12, когда будем говорить об уравнениях с параметрами.

Приведем для примера ответы (множества решений) уравнений 1) — 9):

- 1) $X = \{5\}$;
- 2) $X = \emptyset$;
- 3) $X = (-\infty, +\infty)$;
- 4) $X = \emptyset$; 5) $X = \{-(3 + \sqrt{5})/2\}$; 6) $a = 0$, b — любое или $b = 0$, a — любое;
- 7) $x = 1$, $y = 2$ (одно решение);
- 8) x, y — любые, $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$; 9) x, y — любые.

В заключение этого параграфа сформулируем известные факты о решениях линейных и квадратных уравнений, которые мы будем постоянно использовать. Пусть a, b, c — некоторые вещественные числа.

Множество решений линейного уравнения $ax + b = 0$:

- 1) $a \neq 0 \Rightarrow X = \{-b/a\}$;
- 2) $a = 0$, $b \neq 0 \Rightarrow X = \emptyset$;
- 3) $a = b = 0 \Rightarrow X = (-\infty, +\infty)$.

Множество решений квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (будем считать, что $a \neq 0$; положим $D = b^2 - 4ac$):

- 1) $D > 0 \Rightarrow X = \left\{ \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right\}$;
- 2) $D = 0 \Rightarrow X = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$;
- 3) $D < 0 \Rightarrow X = \emptyset$.

УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Проверьте, являются ли следующие уравнения тождествами:

а) $x^2 = (-x)^2$;

б) $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \sqrt{x^2+1}-x$;

г) $(xz - yt)^2 + (yz + xt)^2 = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$;

д) $\lg x^2 = 2 \lg (-x)$.

5.2. Какие из уравнений $\sqrt{x^2} = x$, $\sqrt[3]{x^3} = x$, $\sqrt{x^2} = |x|$, $\sqrt[3]{x^3} = |x|$ являются тождествами?

5.3. Найти естественную область определения уравнений:

а) $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{x-1}$;

б) $\sqrt{2x-x^2} + \sqrt{\frac{5x-6-x^2}{3+x}} + x^2 = 4$;

в) $\sqrt{3-x} - \sqrt{-x^2+7x-12} = \frac{1}{x-3}$.

5.4. Доказать тождества:

а) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$;

б) $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$;

в) $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$.

§ 6. Связь между уравнениями

Проследим внимательно за ходом рассуждений, которые мы проводим обычно при решении уравнений.

Рассмотрим, например, уравнение

$$x = \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Мы должны найти все решения этого уравнения.

Пусть x_0 — какое-нибудь решение. Тогда после подста-

новки $x = x_0$ мы получим верное равенство $x_0 = \sqrt{\frac{x_0}{x_0-1}}$.

Возведя обе части в квадрат, получим новое верное равен-

ство $x_0^2 = \frac{x_0}{x_0-1}$; умножив обе части на число (x_0-1) ,

получим верное равенство $x_0^2(x_0-1) = x_0$. Перенесем

x_0 в левую часть и вынесем его за скобки. Получим

$$x_0 (x_0^2 - x_0 - 1) = 0.$$

Произведение двух чисел равно нулю, если хотя бы одно из этих чисел равно 0, т. е. $x_0 = 0$ или $x_0^2 - x_0 - 1 = 0$, откуда или x_0 равно 0, или $x_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, или $x_0 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Решили ли мы наше уравнение? Конечно, нет. Мы предположили, что x_0 — решение, и нашли «подозрительные» значения x_0 .

Тем самым мы доказали, что все корни уравнения содержатся во множестве

$$\left\{ 0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Теперь можно каждый из них подставить в исходное уравнение и проверить, является ли он на самом деле решением или нет. Проверка показывает, что числа 0 и $(1 + \sqrt{5})/2$ удовлетворяют исходному уравнению, число $(1 - \sqrt{5})/2$ — нет.

$$\text{О т в е т: } X = \{0, (1 + \sqrt{5})/2\}.$$

Вы видите, что при нашем способе решения уравнения проверка является частью решения.

Обычно не записывают все эти рассуждения так подробно. Вместо фраз «пусть $x = x_0$ — решение», «подставим x_0 в уравнение» и т. д. пишут просто

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{x}{x-1}} \Rightarrow x^2 = \frac{x}{x-1} \Rightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ или } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ или } \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Проверкой убеждаемся, что нашему уравнению удовлетворяют числа 0 и $(1 + \sqrt{5})/2$.

Как же связаны между собой уравнения, которые мы писали вслед за исходным? Вспомним наше первое рассуждение: если число $x = x_0$ есть корень первого уравнения, то оно является корнем и каждого следующего.

Из двух уравнений второе называется следствием первого, если каждое решение первого уравнения является решением второго.

Если A — множество решений первого уравнения, а B — множество решений второго, то каждое число x , содержащееся в A , принадлежит и B , т. е.

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Для такой связи между множествами A и B употребляется специальный значок \subset (включение). $A \subset B$ читается так: « A содержится в B », или « B содержит A », или « A есть часть B », « A есть подмножество B ».

Таким образом, способ, которым мы решали уравнение, состоит в следующем: мы строили цепочку уравнений, в которой первое написанное уравнение — это то, которое нам дано, а дальше каждое уравнение является следствием предыдущего (это мы обозначали стрелкой ¹⁾), т. е. множество его решений содержит в себе все решения предыдущего; решения последнего уравнения нам известны. Затем с помощью проверки мы выясняем, какие из решений последнего уравнения являются решениями первого.

Подчеркнем еще раз: мы должны проделывать с уравнением только такие операции, при которых не может потеряться ни одно решение.

Какие же это операции? Естественно, годятся все такие операции, которые переводят любое верное равенство в верное.

Перечислим конкретно некоторые такие операции. Пусть дано уравнение $f_1(x) = f_2(x)$.

Т е о р е м а 1. Пусть g — функция, определенная при всех тех значениях аргумента, при которых определены функции f_1 и f_2 . Тогда уравнения

$$f_1(x) \cdot g(x) = f_2(x) \cdot g(x), \quad f_1(x) + g(x) = f_2(x) + g(x)$$

являются следствиями уравнения $f_1(x) = f_2(x)$.

Отсюда следует, что если $g(x)$ ни при каком x (из области определения уравнения) не обращается в 0, то уравнение $f_1(x)/g(x) = f_2(x)/g(x)$ является следствием уравнения $f_1(x) = f_2(x)$: действительно, делить на $g(x)$ — это все равно что умножать на $1/g(x)$.

Т е о р е м а 2. Пусть g — произвольная функция, которая определена при всех возможных значениях функций f_1 и f_2 . Тогда уравнение

$$g(f_1(x)) = g(f_2(x))$$

является следствием уравнения $f_1(x) = f_2(x)$.

¹⁾ Из упр. 6.3 будет ясно, что наше новое употребление символа \Rightarrow вполне соответствует тому, что говорилось во введении про высказывание $A \Rightarrow B$.

Здесь $g(f_1(x))$ и $g(f_2(x))$ — результат применения функции g к обеим частям уравнения $f_1(x) = f_2(x)$.

Докажем, например, последнюю теорему. Пусть x_0 — произвольное решение уравнения $f_1(x) = f_2(x)$. Тогда $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ — верное числовое равенство и функция g определена в точке $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Поэтому, по свойству 4 из § 1, $g(f_1(x_0)) = g(f_2(x_0))$ — верное равенство, т. е. x_0 является решением уравнения

$$g(f_1(x)) = g(f_2(x)).$$

Покажем, к чему может привести неаккуратное обращение с этими теоремами. Все следующие переходы:

- 1) $x = x^2 - 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 2};$
- 2) $x^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1};$
- 3) $x^2 - 1 = 2(x+1) \Rightarrow x - 1 = 2;$
- 4) $x^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{-x}}\right) = 4 - \frac{4}{\sqrt{-x}} \Rightarrow x^2 = 4,$

неверны — во всех случаях пропал корень $x = -1$.

Что же произошло с этими уравнениями? В первом примере к обеим частям применили функцию $t \rightarrow \sqrt{t}$, определенную только при $t \geq 0$. Однако и левая и правая части исходного уравнения принимают и отрицательные значения; более того, они отрицательны при подстановке одного из корней. Разумеется, этот корень оказался потерянным. Во втором примере мы прибавили функцию $x \rightarrow \frac{1}{x+1}$, которая не определена при $x = -1$. В третьем примере разделили обе части уравнения на функцию $x \rightarrow x+1$, которая при $x = -1$ обращается в 0 (т. е. умножили на $\frac{1}{x+1}$, что при $x = -1$ не имеет смысла). Похожая ошибка и в последнем примере. Подчеркнем еще раз, что делить обе части уравнения на функцию, которая обращается в 0, нельзя. Вместо этого нужно перенести все члены уравнения в одну часть, вынести общие множители за скобку и воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 3. Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

с областью допустимых значений A . Пусть функция f представлена в виде произведения функций g_1, g_2, \dots, g_k , которые

имеют ту же область определения A . Тогда множество решений уравнения (1) есть объединение множеств решений уравнений

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0, \quad \dots, \quad g_k(x) = 0. \quad (2)$$

Иными словами, чтобы решить уравнение (1), нужно решить каждое из уравнений (2) и объединить все их корни.

Доказательство. Возьмем корень уравнения (1), подставим его, заменив f на $g_1 g_2 \dots g_k$. Получим произведение k чисел, равное 0. Хотя бы один из сомножителей обязан равняться нулю, например, $g_i = 0$. Это означает, что взятый корень уравнения (1) есть корень одного из уравнений (2).

Докажем обратное. Возьмем корень какого-либо из уравнений (2). Этот корень обращает это уравнение в верное равенство. Подставим его в уравнение (1). Один из сомножителей обратится в 0. Это означает, что это число есть корень (1).

Конечно, нужно следить за тем, чтобы области определения $f(x)$ и всех функций $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)$ совпадали. Если одна из функций g_i при $x = x_0$ обращается в 0, а другая в точке $x = x_0$ теряет смысл, то могут получиться такие казусы:

$$1) \quad x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x + 1} = 0.$$

Уравнение $x^2 - 1 = 0$ имеет корнями $x = -1; x = 1$; уравнение $\frac{1}{x + 1} = 0$ не имеет корней. Но исходное уравнение $x - 1 = 0$ имеет только один корень, и мы получили посторонний корень.

$$2) \quad x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{x^2 - 1} \cdot (x + 1)^2 = 0.$$

Уравнение $\frac{(x - 1)^2}{x^2 - 1} = 0$ корней не имеет; уравнение $(x + 1)^2 = 0$ имеет корень $x = -1$. Исходное уравнение имеет два корня, и мы потеряли корень.

Заметим, что мы могли бы сформулировать наши теоремы короче, используя те понятия суммы и произведения функций, которые были даны во введении. Например, теорема 1 звучала бы просто так:

Уравнения $(f_1 + g)(x) = (f_2 + g)(x)$ и $(f_1 g)(x) = (f_2 g)(x)$ являются следствиями уравнения $f_1(x) = f_2(x)$.

Формально говоря, никаких оговорок больше не нужно, потому что уже само по себе точное определение, что такое сумма или произведение функций, подразумевает, что f_1 , f_2 и g заданы на одном и том же множестве. Мы привели более детальные формулировки, чтобы лишний раз напомнить: проделывая над уравнением какие-либо операции, нужно следить, чтобы эти операции годились для всех x из области определения.

Практически трудности, связанные с областью определения, возникают, как правило, лишь при решении довольно искусственных уравнений с корнями или логарифмами (они предлагаются иногда на экзаменах).

Мы не можем дать твердый совет, надо ли находить область определения уравнения перед его решением. Бывают такие уравнения, область определения которых состоит из одной точки или даже пуста. В этих случаях, конечно, знание области определения сразу приведет к ответу. Но иногда аккуратное нахождение области определения уравнения труднее, чем полное его решение. Наиболее целесообразно перед началом решения выписать все «запреты», не сопоставляя их друг с другом, и в ходе решения сверяться с выписанными условиями.

Например, решая уравнение о) на стр. 48, стоит только выписать условия:

$$x^2 \geq 24, \quad x\sqrt{x^2 - 24} \geq -1,$$

не решая системы неравенств.

Получая из этого уравнения очевидные следствия, мы быстро найдем, что $x = 0$ или $x = 7$. Второе число удовлетворяет выписанным условиям, а первое нет.

Иногда бывает полезно разбить область определения уравнения на несколько частей и отдельно преобразовывать уравнение на каждой из них. Ясно, что при этом все корни всех полученных «сужением» уравнений дадут нам нужное множество. Нам удобно (для ссылок) сформулировать это в виде теоремы.

Теорема 4. Если область определения E уравнения $f(x) = g(x)$ представить в виде объединения нескольких множеств

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k,$$

решить уравнение отдельно на каждом из этих множеств и затем собрать все решения, то мы получим множество всех решений уравнения $f(x) = g(x)$.

Пример.

$$x|x| + |2x^2 - 5x| = 6$$

↓

$$1) \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x \geq 0 \\ x^2 + 2x^2 - 5x = 6 \end{cases}$$

↓

$$3x^2 - 5x - 6 = 0$$

↓

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{97}}{6}; \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{97}}{6}.$$

$$2) \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x < 0 \\ x^2 - 2x^2 + 5x = 6 \end{cases}$$

↓

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

↓

$$x_3 = 2; \quad x_4 = 3.$$

$$3) \begin{cases} x < 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x > 0 \\ -x^2 + 2x^2 - 5x = 6 \end{cases}$$

↓

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

↓

$$x_5 = -1; \quad x_6 = 6.$$

Проверка показывает, что корни $(5 - \sqrt{97})/6$, $(5 + \sqrt{97})/6$, 3, 6 не удовлетворяют ограничениям, наложенным в каждом из трех соответствующих случаев 1), 2), 3); остаются два решения, которые удовлетворяют уравнению.

О т в е т: $X = \{-1; 2\}$.

Если бы мы решили системы неравенств в каждом из трех случаев 1), 2), 3), то выяснили бы, что вся числовая ось разбилась на три множества: 1) $x \geq 5/2$; 2) $0 \leq x < 5/2$; 3) $x < 0$. И дальше решали бы уравнение отдельно на каждом из этих множеств.

Важное замечание. Когда мы пишем какие-то ограничения, задающие область определения уравнения $f(x) = g(x)$, скажем $f_1(x) \geq 0$, $f_2(x) < 0$, $f_3(x) \neq 0$, то получаем несколько высказываний, связанных союзом и: нас интересует множество точек, в которых

$$f(x) = g(x) \text{ и } f_1(x) \geq 0 \text{ и } f_2(x) < 0 \text{ и } f_3(x) \neq 0,$$

т. е. множество точек, удовлетворяющих одновременно всем условиям, оно называется пересечением (общей частью) полученных множеств точек.

Наоборот, когда мы рассматриваем несколько отдельных случаев (например, пользуемся теоремами 4 или 3), то получаем несколько высказываний, связанных союзом или. Например, в последнем примере решениями исходного уравнения были числа, удовлетворяющие условиям 1), или 2),

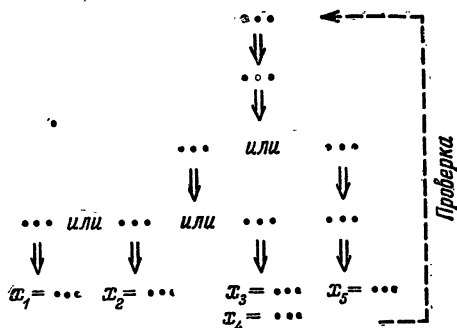


Рис. 8.

или 3). Точно так же в ситуации, описываемой теоремой 3, высказывание $g(x) = 0$ эквивалентно такому:

$$g_1(x) = 0 \text{ или } g_2(x) = 0 \text{ или } \dots \text{ или } g_k(x) = 0.$$

Нас интересует множество точек, удовлетворяющих хотя бы одному из этих уравнений, т.е. объединение множеств точек, удовлетворяющих отдельным условиям

$$g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0.$$

Когда мы переходим от одного уравнения к совокупности нескольких уравнений, соединенных союзом или, то схема решения уравнения выглядит примерно так, как показано на рис. 8.

$$\begin{aligned} \text{Пример. } & \frac{6x^2}{\sqrt{x^2+1}} + x^2 + 1 = x(3 + 2\sqrt{x^2+1}) \\ & \Downarrow \\ & \frac{6x^2}{\sqrt{x^2+1}} - 3x - 2x\sqrt{x^2+1} + (x^2+1) = 0 \\ & \Downarrow \\ & \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}(3x - x^2 - 1) - 3x + x^2 + 1 = 0 \\ & \Downarrow \end{aligned}$$

$$\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right) (3x - x^2 - 1) = 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \quad \text{или} \quad 3x - x^2 - 1 = 0$$

$$4x^2 = x^2 + 1 \qquad x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \quad x_4 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}};$$

Из полученных решений первоначальному уравнению удовлетворяют только три:

$$X = \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

$$\text{Ответ: } X = \left\{ \sqrt{\frac{1}{3}}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

В этом примере, как и во многих других случаях, подставлять все найденные значения в первоначальное уравнение и делать проверку слишком канительно. Гораздо проще разобраться, при каких переходах появились лишние корни.

Этому важному вопросу — при каких операциях возникают посторонние решения, или, как говорят, нарушается равносильность уравнений — мы посвятим следующий параграф.

УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Всегда ли уравнение $f_1(x) = f_2(x)$ является следствием уравнения $f_1^2(x) = f_2^2(x)$, т. е. верно ли, что $f_1^2(x) = f_2^2(x) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$?

Проверить верность следующих переходов:

а) $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow x f_1(x) = x f_2(x)$;

б) $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow f_1(x) + \sqrt{1-x^2} = f_2(x) + \sqrt{1-x^2}$;

в) $\frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{f_2(x)} \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$;

г) $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow |f_1(x)| = |f_2(x)|$

(в каждом случае нужно дать доказательство или привести опровергающий пример).

6.2. а) Укажите все ошибки в следующем решении уравнения (а затем решите его правильно):

$$\begin{aligned}
 9 - x^2 &= 2x (\sqrt{10 - x^2} - 1) \\
 \Downarrow \\
 9 - 2x \sqrt{10 - x^2} &= x^2 - 2x \\
 \Downarrow \\
 10 - x^2 - 2x \sqrt{10 - x^2} + x^2 &= x^2 - 2x + 1 \\
 \Downarrow \\
 (\sqrt{10 - x^2} - x)^2 &= (x - 1)^2 \\
 \Downarrow \\
 \sqrt{10 - x^2} - x &= 1 \\
 \Downarrow \\
 \sqrt{10 - x^2} &= 2x - 1 \\
 \Downarrow \\
 10 - x^2 &= 4x^2 - 4x + 1 \\
 \Downarrow \\
 x_1 &= 9/5 \text{ или } x_2 = -1.
 \end{aligned}$$

б) Почему пропал корень при решении следующего уравнения?

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 - 1} &= (x + 5) \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \\
 \Downarrow \\
 \sqrt{(x+1)(x-1)} - (x+5) \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} &= 0 \\
 \Downarrow \\
 \sqrt{x+1} \left(\sqrt{x-1} - \frac{x+5}{\sqrt{x-1}} \right) &= 0 \\
 \Downarrow \\
 \sqrt{x+1} = 0 \text{ или } \sqrt{x-1} - \frac{x+5}{\sqrt{x-1}} &= 0 \\
 \Downarrow & \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\
 x+1 = 0 & \qquad \qquad \qquad (\sqrt{x-1})^2 - (x+5) = 0 \\
 \Downarrow & \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\
 x = -1 & \qquad \qquad \qquad x-1-x-5 = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\
 & \qquad \qquad \qquad -6 = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{нет решений.}
 \end{aligned}$$

(Пропал корень $x = -2$.)

6.3. Проверьте, что уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ является следствием уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ тогда и только тогда, когда высказывание

$$f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$$

верно при всех числовых значениях x (см. стр. 30). Свяжите это с тем, что для множеств решений этих уравнений X_1 и X_2 должно выполняться условие $X_1 \subset X_2$.

6.4. Некоторые из следующих уравнений являются следствиями других; например, ж) \Rightarrow в). Укажите все такие пары.

а) $\sqrt{x+2} = |x|$;

б) $x = x^2$;

в) $x + \frac{1}{x} = 2$;

г) $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$;

д) $\sqrt{x+2} = \sqrt{2} - x$;

е) $\frac{x}{x-1} = \frac{x+5}{x+9}$;

ж) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$;

з) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 0$.

6.5. Докажите, что

а) $x + y = 0 \Rightarrow x^{1917} + y^{1917} = 0$;

б) $x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$;

в) $\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0 \Rightarrow \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0$;

г) $x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$;

д) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{1}{a^{1917} + b^{1917} + c^{1917}} = \frac{1}{(a+b+c)^{1917}}$.

6.6. Придумайте уравнение, которое было бы следствием любого уравнения. А затем такое, следствием которого являлось бы любое уравнение! (Речь идет об уравнениях с одним неизвестным x .)

§ 7. Равносильность уравнений

Два уравнения называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Это можно сформулировать более подробно: два уравнения *равносильны*, если каждое решение первого является решением второго и, наоборот, каждое решение второго уравнения является решением первого; другими словами, если уравнения являются следствиями друг друга.

Равносильность двух уравнений означает, что $A = B$, где A, B — множества решений первого и второго уравнения соответственно. Заметим, что наша более подробная формулировка выглядит на языке теории множеств так: $A \subset B$ и $B \subset A$.

Например, уравнение $x - 1 = 0$ равносильно уравнению $\sqrt{x^2 - x + 1} = 2x - 1$; уравнение $x^2 + 2xy + y^2 = 0$ равносильно уравнению $x + y = 0$.

Вместо данного уравнения можно решать уравнение, ему равносильное. Замена одного уравнения другим, ему равносильным, множество решений которого по каким-то причинам найти легче, является основным приемом при решении уравнений.

Пусть имеется уравнение

$$f_1(x) = f_2(x) \quad (1)$$

и g — функция, которую можно применить к обеим частям уравнения. Тогда мы знаем (теорема 2 § 6), что уравнение

$$g(f_1(x)) = g(f_2(x)) \quad (2)$$

является следствием уравнения (1):

$$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow g(f_1(x)) = g(f_2(x)). \quad (3)$$

Для того чтобы уравнения (1) и (2) были равносильны, нужно, чтобы каждый корень уравнения (2) был корнем уравнения (1), иначе говоря, чтобы был возможен переход

$$g(f_1(x)) = g(f_2(x)) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x). \quad (4)$$

Легко сообразить, что подобный переход возможен, если функция g переводит всякое неверное равенство в неверное (обязательно подумайте, почему это так!).

Свойства числовых равенств 1, 2, 3 и 1', 2', 3' § 4 показывают нам примеры функций, для которых возможны оба перехода \Rightarrow и \Leftarrow . Сформулируем это в качестве теорем.

Т е о р е м а 1. Если к двум частям уравнения прибавить одно и то же число или обе части уравнения умножить на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное исходному.

Эта теорема позволяет, в частности, получать равносильное уравнение при переносе числа из одной части в другую (с противоположным знаком).

В теореме 1 можно слово *число* заменить словом *функция*, т. е., прибавляя к двум частям одну и ту же функцию или умножая их на функцию, не обращающуюся в 0, мы будем получать уравнения, равносильные исходному. Но при этом, как мы уже говорили в § 2, очень важно следить за тем, чтобы область определения уравнения не изменилась или, по крайней мере, чтобы это изменение не затрагивало корни.

Т е о р е м а 2. Если в двух частях уравнения стоят функции, принимающие только неотрицательные значения,

то при возведении обеих частей в одну и ту же степень получим уравнение, равносильное данному.

Как видим, общих переходов, сохраняющих равносильность для любых уравнений, мы смогли назвать немного.

Конечно, наше определение равносильности позволяет придумать примеры уравнений, в которых весьма «дикие» переходы не нарушают равносильности.

Например, мы сейчас приведем уравнение, которое переходит в равносильное при умножении левой части на 5, а правой — на 3. Это уравнение: $2x = 3x$; преобразованное $10x = 9x$. Они, очевидно, равносильны, так как оба имеют только один корень $x = 0$. Разумеется, такими «дикими» переходами для решения уравнений пользоваться не приходится.

Решение уравнения с использованием понятия равносильности происходит следующим образом.

Исходя из данного уравнения, строим цепочку других уравнений с помощью преобразований, переводящих каждое уравнение в его следствие, стараясь прийти к уравнению, решения которого мы уже знаем. Затем проверяем, обратимы ли совершенные переходы, можно ли поставить стрелки в обратную сторону. Если да, то мы решили исходное уравнение, так как все уравнения в построенной цепочке равносильны друг другу, а решения последнего мы нашли. Если же нет, то через неравносильный переход придется «перегнать» каждый из найденных корней последнего уравнения и оставить лишь те из них, для которых этот, вообще говоря, необратимый переход оказался обратимым.

Приведем примеры.

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{x^2}{x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \\ &\Downarrow \\ x^2 &= \frac{1}{2}(x^2 + 1) \\ &\Downarrow \\ x^2 &= 1. \end{aligned}$$

Решения последнего уравнения мы знаем — это числа 1 и -1 . Проверим обратимость всех переходов. Сомнение может вызвать только переход от первого уравнения ко второму, который состоял в умножении на функцию $y = x^2 + 1$. Эта функция в 0 не обращается, так что и этот переход обратим. Уравнение решено.

О т в е т: $X = \{-1; 1\}$.

$$\begin{aligned}
2. \sqrt{x^2 - 4x + 13} + 1 &= 2x \\
&\Downarrow \\
\sqrt{x^2 - 4x + 13} &= 2x - 1 \\
&\Downarrow \\
x^2 - 4x + 13 &= 4x^2 - 4x + 1 \\
&\Downarrow \\
3x^2 &= 12 \\
&\Downarrow \\
x^2 &= 4 \\
&\Downarrow \\
x = 2 \text{ или } x = -2.
\end{aligned}$$

Все переходы, кроме второго, обратимы. Подставим числа 2 и -2 во второе уравнение. Получим $\sqrt{9} = 3$ — верное равенство, $\sqrt{25} = -5$ — неверное равенство.

Следовательно, решением исходного уравнения является только число 2. (При втором переходе произошло расширение множества решений.)

О т в е т: $X = \{2\}$.

Прием, с помощью которого иногда удается избежать появления лишних корней, сохранить равносильность переходов, — это разбиение области определения уравнения на несколько частей, на каждой из которых наше уравнение легко исследовать или заменить равносильным, но более простым (см. теорему 4 из § 6).

Например, переход

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - 4x + 13} &= 2x - 1 \\
&\Downarrow \\
x^2 - 4x + 13 &= (2x - 1)^2,
\end{aligned}$$

как мы только что видели, не сохраняет равносильности (появляется посторонний корень $x = -2$). Заметим теперь, что первое уравнение заведомо не может иметь решений на множестве, где правая часть $2x - 1$ меньше 0, поскольку $\sqrt{\quad}$, стоящий в левой части, всегда неотрицательное число, т. е. на множестве $(-\infty; \frac{1}{2}]$ решений нет. С другой

стороны, ясно, что на множестве $[\frac{1}{2}; +\infty)$ тот же переход

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4x + 13} &= 2x - 1 \\ \Downarrow \\ x^2 - 4x + 13 &= (2x - 1)^2\end{aligned}$$

обратим: в обеих частях первого уравнения стоят теперь функции, принимающие неотрицательные значения, и остается применить теорему 2.

При этом способе решения вместе с последним уравнением $x^2 = 4$ мы получили бы ограничение $x \geq \frac{1}{2}$. Отсюда ясно, что $x = 2$ — единственный корень, и необходимость в проверке отпала.

Заметим, что теоремы 3 и 4 из § 6 дают равносильный переход от одного уравнения к совокупности нескольких уравнений.

Еще одно замечание относительно уравнений, имеющих бесконечно много решений (например, $\sqrt{x^4 - 6x^2 + 9} + x^2 = 3$). При решении таких уравнений сделать проверку в обычном смысле слова, т. е. подставить все решения одно за другим в исходное уравнение, невозможно, и приходится следить за равносильностью переходов.

То же самое относится и к доказательству тождеств: при доказательстве тождества мало вывести из него очевидное тождество в качестве следствия — нужно еще проверить обратимость всех переходов; только тогда мы докажем, что исходное уравнение действительно справедливо для всех значений входящих в него аргументов, т. е. является тождеством.

УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Равносильны ли уравнения:

- а) $x^3 + 2x + 1 = 0$ и $x + 1 = 0$;
- б) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = -(x + 1)$ и $1 + x = 0$;
- в) $\frac{\sqrt{x}}{x + 1} = \frac{1}{5}$ и $\sqrt{x} = \frac{x + 1}{5}$;
- г) $\frac{x^2}{x - 1} = 2x$ и $\frac{x}{x - 1} = 2$?

7.2. Может ли нарушиться равносильность при возвышении обеих частей уравнения в куб?

7.3. Докажите, что для любых двух функций f_1 и f_2 с одной и той же областью определения

$$[\sqrt{f_1(x)} = f_2(x) \text{ и } f_2(x) \geq 0] \Leftrightarrow f_1(x) = f_2^2(x).$$

7.4. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2 + 5} = 2x + 1$;

б) $\sqrt[3]{x^3 + 21} = x + 1$;

в) $\sqrt[4]{x^3(x+1)} = x + 1/4$.

7.5. Решите несколько уравнений с модулями:

а) $|x^2 - x - 2| = 2x^2 + 3x + 1$;

б) $\sqrt{x^2 - |x + 2|} = 2x - |x + 1|$;

в) $||x| - 4| - 3| - 2| = 1$.

7.6. Укажите, какие из пар уравнений в упр. 6.4 равносильны.

§ 8. Корни многочленов

Алгебра долго развивалась как наука о решении уравнений, причем прежде всего уравнений вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0. \quad (1)$$

В § 5 мы привели известные еще в древности формулы для решений линейных и квадратных уравнений. В XVI—XVII вв. были получены аналогичные, но более громоздкие формулы для уравнений третьей и четвертой степени. Уравнения степени выше второй, которые попадают в школьную практику, удается решить без использования общей теории. Некоторые из встречающихся нехитрых приемов мы и рассмотрим в начале этого параграфа.

Очень часто полезно сделать замену неизвестного, которая упрощает вид уравнения. Например, если уравнение удается привести к виду

$$a [f(x)]^2 + b f(x) + c = 0,$$

то, заменив неизвестное по формуле $y = f(x)$, мы сведем дело к решению двух уравнений:

$$f(x) = y_1, \quad f(x) = y_2,$$

где y_1 и y_2 — корни уравнения $ay^2 + by + c = 0$.

Простейшим примером такого типа уравнений является биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Оно решается заменой $y = x^2$.

Интересная замена неизвестного применяется при решении так называемых симметрических уравнений, т. е. уравнений вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Делим на x^2 ; получим равносильное (при $x \neq 0$) уравнение

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0.$$

Заметив, что $ax^2 + \frac{a}{x^2} = a\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2a$, приведем уравнение к виду $a\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c - 2a = 0$. Дальнейшее очевидно.

Некоторые уравнения можно быстро упростить, если заметить их симметрию.

Пример. $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$.

Числа $x, x+1, x+2, x+3$ симметрично расположены относительно числа $x + \frac{3}{2}$. Сделаем замену переменной $x + \frac{3}{2} = y$. Уравнение будет иметь вид

$$(y - \frac{3}{2})(y - \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})(y + \frac{3}{2}) = 24,$$

или

$$(4y^2 - 9)(4y^2 - 1) = 384.$$

Дальнейшее очевидно.

Часто подобрать нужную замену в уравнении четвертой степени помогает выделение полного квадрата. Например, если, решая уравнение $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$, мы не заметили никакой симметрии, а просто перемножив, получили уравнение

$$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 24 = 0,$$

то можно поступить так:

$$(x^2 + 3x)^2 - 9x^2 + 11x^2 + 6x - 24 = 0$$

$$(x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) - 24 = 0.$$

Дальнейшее ясно.

Если в уравнении третьей-четвертой степени заранее не подобраны коэффициенты, то ответ может выглядеть весьма неприятно (см., например, стр. 51). Но для уравнений степени выше четвертой и таких формул подобрать не удастся. Норвежский математик Абель в 1823 г. доказал, что корни большинства уравнений уже пятой степени (например, такого: $x^5 - 3x + 1 = 0$) не могут быть выражены с помощью радикалов. Уяснение причин этого послужило толчком для создания современных разделов алгебры — теории групп, теории полей и т. п.

Прежде чем продолжить обсуждение вопроса о решении алгебраических уравнений, сделаем одно очевидное замечание. Если мы сумели разложить многочлен $f(x)$ на множители $f(x) = g(x)h(x)$, то решение уравнения $f(x) = 0$ сводится по теореме 4 из § 6 к решению уравнений меньших степеней $g(x) = 0$ и $h(x) = 0$. В частности, если выделился линейный множитель $x - a$, то число a является корнем уравнения $f(x) = 0$. Нетрудно показать и обратное: если a является корнем уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен, то $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = (x - a)h(x)$, где $h(x)$ — тоже многочлен. Этот факт (называемый теоремой Безу) можно доказать так: представим себе процесс деления столбиком многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$. Остатком будет постоянное число b . Можно будет записать результат деления так: $f(x) = (x - a)h(x) + b$, где $h(x)$ — некоторый многочлен. Так как по условию $f(a) = 0$, то, подставляя $x = a$, получим, что $b = 0$, что и требовалось доказать.

Из сказанного следует такой способ решения уравнений вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен. Будем пытаться разложить многочлен $f(x)$ на множители. Оказывается, что есть сравнительно несложные приемы, которые позволяют получить разложение многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами в произведение многочленов тоже с целыми коэффициентами, если такое разложение вообще возможно. Остановимся только на способе нахождения линейных множителей.

Т е о р е м а. Если несократимая дробь p/q есть корень многочлена

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

с целыми коэффициентами, то a_0 делится на p , а a_n делится на q .

Доказательство. Подставим $x = p/q$ и приведем к общему знаменателю. Получим

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Запишем это равенство сначала так:

$$p(a_n p^{n-1} + \dots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n.$$

Так как q , а вместе с ним и q^n , взаимно просто с p , то a_0 делится на p . Аналогично из равенства

$$a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 q^{n-1})$$

и взаимной простоты p и q следует, что a_n делится на q . Теорема доказана.

Пример. Рациональные корни уравнения

$$x^3 + 3x^2 + 7x + 10 = 0$$

могут быть только среди чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ ($a_0 = 10, a_3 = 1$). Ясно, что положительных корней быть не может. Осталось испытать четыре числа. Убеждаемся, что $x = -2$ является корнем. По теореме Безу многочлен $x^3 + 3x^2 + 7x + 10$ должен делиться на $x + 2$. «Заставим» его выделить множитель $x + 2$:

$$x^3 + 3x^2 + 7x + 10 = x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 5x + 10 = (x + 2)(x^2 + x + 5).$$

Квадратное уравнение $x^2 + x + 5 = 0$ вещественных корней не имеет.

В общем случае мы можем порекомендовать метод *неопределенных коэффициентов*. Проиллюстрируем его на примере.

Решим уравнение $x^4 + x^3 - 8x^2 + 3x + 5 = 0$.

Сначала проверкой убеждаемся, что рациональных корней у него нет. Осталась надежда на то, что нам удастся разложить многочлен $x^4 + x^3 - 8x^2 + 3x + 5$ на два квадратных множителя:

$$x^4 + x^3 - 8x^2 + 3x + 5 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Постараемся найти «неопределенные» пока целые коэффициенты a, b, c и d . Приравняем слева и справа коэффициенты

при одинаковых степенях:

$$\begin{cases} 1 = a + c, \\ -8 = ac + b + d, \\ 3 = ad + bc, \\ 5 = bd. \end{cases}$$

Так как множители в последнем уравнении системы равноправны, то можно считать, что $b = 1$ или $b = -1$ (напомним, что мы ищем целочисленные решения системы).

При $b = 1$ имеем $d = 5$, $ac = -14$, $a + c = 1$ — целых решений нет.

При $b = -1$ имеем $d = -5$, $ac = -2$, $a + c = 1$. Получаем, что либо $a = 2$, $c = -1$, либо $a = -1$, $c = 2$. Третьему уравнению удовлетворяет лишь вторая пара. В итоге

$$x^4 + x^3 - 8x^2 + 3x + 5 = (x^2 - x - 1)(x^2 + 2x - 5).$$

Как мы уже сказали, кроме некоторых специально «школьных» типов уравнений, записать формулой корни уравнения (1) не удастся. Вернемся к исходной постановке вопроса. Мы помним, что решить уравнение — это значит найти множество его решений. А что это значит, и а й т и м н о ж е с т в о? Какие способы задания его элементов нас устроят? До сих пор нам «везло», и у нас встречались либо рациональные числа, либо числа, получающиеся из них с помощью операций сложения, умножения, вычитания, деления, извлечения корня. Если этих операций не хватает (да, кроме того, извлечение корня n -й степени — не такая уж удобная для вычисления операция), то нам надо встать на более широкую точку зрения. Она может состоять в том, что мы будем считать, что нам задано число, если указан способ его вычисления с любой степенью точности. Математика создала — и продолжает это делать сейчас — много мощных способов вычисления корней уравнения с любой степенью точности. Эти методы являются важной составной частью математического анализа, теории функций, а современные электронные вычислительные машины позволяют реализовать их на практике. (Например, для вычисления корня многочлена $x^5 - 3x + 1$, лежащего в интервале $(0; 1)$, с точностью до 0,000001 средней машине нужно около 0,002 сек.)

При реализации новой точки зрения на первый план выступают совершенно иные вопросы. Нужно уметь находить

количество корней уравнения в заданном интервале и вообще быстро определять отрезки, в каждом из которых находилось бы ровно по одному корню нашего уравнения. Некоторые соображения по этому поводу мы выскажем в дальнейшем.

Мы говорили здесь об уравнениях вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен. Если $x = a$ является корнем уравнения, то $f(x) = (x - a)h(x)$, где $h(x)$ тоже многочлен. Если $h(x)$ также обращается в нуль при $x = a$, то с точки зрения уравнений это ничего нового не дает — во множество X решений уравнения мы включаем каждый корень уравнения по одному разу. Однако представьте себе, что два различных корня уравнения расположены друг к другу очень близко. На это весьма «болезненно» реагируют приближенные методы вычислений — для них важно отделить корни друг от друга или хотя бы знать заранее, обращается ли в нуль многочлен $h(x)$.

Мы уже употребляли понятие *корень многочлена* $f(x)$ — это корень уравнения $f(x) = 0$. Если

$$f(x) = (x - a)h(x) \quad \text{и} \quad h(a) \neq 0,$$

то мы будем говорить, что a — корень многочлена $f(x)$ *первой кратности*. Если же и $h(a) = 0$, то $h(x)$ делится на $x - a$, а $f(x)$ делится уже на $(x - a)^2$. Пусть $(x - a)^k$ — наибольшая степень $x - a$, на которую делится $f(x)$, т. е.

$$f(x) = (x - a)^k g(x),$$

где $g(a) \neq 0$. Тогда число k называется *кратностью* корня a многочлена $f(x)$.

Например, многочлен $x^5 - 2x^3 + x$ имеет число 0 корнем первой кратности, а числа 1 и -1 — корнями второй кратности, так как

$$x^5 - 2x^3 + x = x(x^2 - 1)^2 = x(x - 1)^2(x + 1)^2.$$

Кратность корня 0 узнавать легко: нужно посмотреть, сколько коэффициентов «с конца» в уравнении (1) обратилось в нуль. Так, у многочлена $x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 7x^3$ число нуль есть корень третьей кратности.

Многие из наших практических рекомендаций — замена неизвестного, разложение на множители, использование симметрии и т. п. — относятся не только к уравнениям $f(x) = 0$, левая часть которых — многочлен. Вот почему в упражнениях включены и уравнения других типов.

УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Решить уравнения:

а) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$;

б) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$;

в) $x^4 + (1 - x)^4 = 97$;

г) $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$;

д) $\sqrt[4]{\frac{a-x}{b+x}} + \sqrt[4]{\frac{b+x}{a-x}} = 2$;

е) $\frac{x}{\sqrt{1+x+1}} = 4 + \frac{\sqrt{x+1} - 1}{2}$;

ж) $\sqrt[5]{(7x-3)^3} + 8\sqrt[5]{\frac{1}{(3-7x)^3}} = 7$;

з) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$;

и) $\frac{x}{\sqrt{1-x+1}} + \frac{x}{\sqrt{1+x-1}} = 1$;

к) $\sqrt{(x+1)(x-2)} = 2x^2 - 2x - 10$;

л) $\sqrt[4]{a+x} + \sqrt[4]{a-x} = 2\sqrt[4]{a^2-x^2}$;

м) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$;

н) $x^3 + 2x^2(a+1) + x(a^2 + 2a + 2) = 0$;

о) $\sqrt{1+x}\sqrt{x^2-24} = x-1$;

п) $x^4 - a^4 - 3a^3x + 3ax^3 = 0$;

р) $\frac{x^3}{2} + \frac{2}{x^2} = 5 \cdot \frac{2-x^2}{2x}$.

8.2. Докажите, что не существует многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, у которого $P(7) = 11$, а $P(11) = 13$.

8.3. Решить уравнения:

а) $2x^3 - x^2 - 10x - 7 = 0$;

б) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$;

в) $6x^4 - 19x^3 - 7x^2 + 26x + 12 = 0$;

г) $x^4 - 5x^3 - 2x + 3 = 0$.

8.4. Доказать, что если p/q — несократимая рациональная дробь — есть корень многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, то при любом целом a число $f(a)$ делится на $p - aq$. Эту теорему часто используют для нахождения рациональных корней многочлена, особенно при $a = \pm 1$.

8.5. а) Доказать, что многочлен $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$, где a_1, \dots, a_n — различные целые числа, не раскладывается на множители с целыми коэффициентами. б) Определить a и b так, чтобы многочлен $ax^n + bx^{n-1} + 1$ делился на $(x-1)^2$. в) Доказать, что 1 является корнем третьей кратности многочлена $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$.

§ 9. Графическое исследование уравнений

Рассмотрим уравнение с одним неизвестным

$$f_1(x) = f_2(x). \quad (1)$$

Нарисуем на одном чертеже графики функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ (рис. 9). Точкам пересечения графиков этих

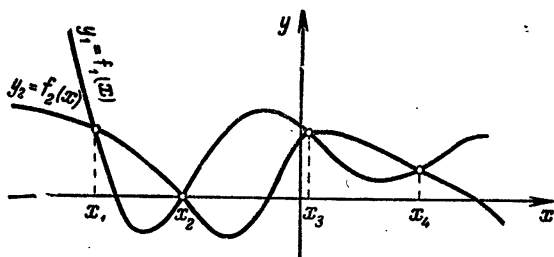


Рис. 9.

функций соответствуют те значения аргумента x , при которых совпадают значения функций, т. е. корни уравнения (1).

Итак, абсциссы точек пересечения графиков функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ являются корнями уравнения $f_1(x) = f_2(x)$.

Например, для уравнения $x^2 = x + 2$ такими точками будут $P_1 = (-1, 1)$ и $P_2 = (2, 4)$ (рис. 10).

Если наше уравнение имеет вид $f(x) = 0$, то в качестве функции, стоящей в правой части, выступает функция $y = 0$. Графиком ее будет ось Ox , так что решениями уравнения $f(x) = 0$ будут абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox (рис. 11).

Указанная графическая иллюстрация уравнения и его корней подсказывает, на первый взгляд, и способ решения уравнения — начертим две кривые и найдем их точки пересечения. Действительно, если выбрать не слишком

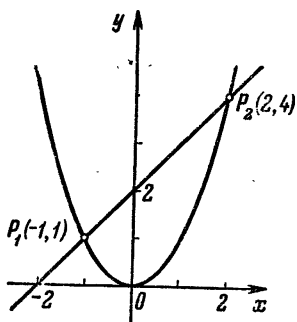


Рис. 10.

мелкий масштаб и начертить графики достаточно аккуратно, мы сможем приближенно найти точки пересечения. Но для того, чтобы найти координаты точек пересечения точно, как раз и нужно решить соответствующее уравнение! В то же

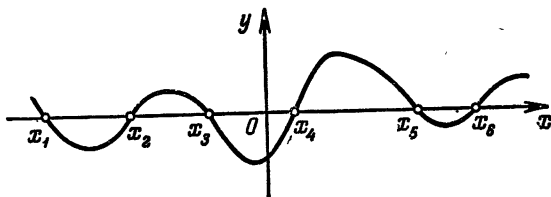


Рис. 11.

время графическая иллюстрация часто помогает дать некоторые качественные ответы: найти число корней, грубо указать отрезки на числовой оси, где они могут находиться, и т. п.

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\sqrt{x} = (x - 1)^2. \quad (2)$$

Начертим графики функций, стоящих в левой и правой частях (рис. 12). Из этого рисунка мы можем заключить, что

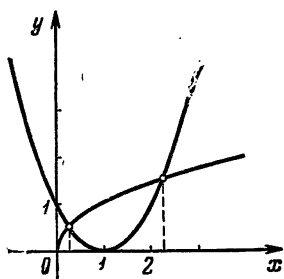


Рис. 12.

уравнение имеет два вещественных корня, один из которых находится в интервале (0; 1), а другой — в интервале (2; 3). Можно указать эти интервалы и более точно: (0; 0,5) и (2; 2,5); еще более точно: (0,2; 0,3) и (2,2; 2,3). (Действительно, нетрудно проверить, что при $x = 0,2$ имеем $\sqrt{x} < (x - 1)^2$, а при $x = 0,3$ уже $\sqrt{x} > (x - 1)^2$; точно так же при $x = 2,2$ левая часть уравнения больше правой, а при $x = 2,3$ — меньше.)

Вообще, вычисляя и сравнивая значения левой и правой частей нашего уравнения, мы можем найти корни с любой степенью точности. В сущности, это ничуть не хуже, чем

какое-нибудь выражение типа

$$x = 1 + \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{283}{108} + \frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\frac{283}{108} - \frac{1}{2}}}}{2} \times$$

$$\times \left[1 \pm \sqrt{\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{283}{108} + \frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\frac{283}{108} - \frac{1}{2}}} \right)^3 - 1}} \right]$$

все равно извлечь корни мы можем только приближенно. (Именно такое выражение получается, если решать уравнение $(x - 1)^4 - x = 0$, получающееся из нашего после возведения в квадрат, по общей формуле для уравнений четвертой степени. Понятно, что эта формула из-за своей громоздкости никогда не употребляется!)

Корни уравнения пятой степени

$$x^5 - 3x + 1 = 0 \quad (3)$$

вообще нельзя записать с помощью радикалов, но, построив достаточно точно график функции $y = x^5 - 3x + 1$ (рис. 13), мы сразу видим, что уравнение имеет три корня в интервалах $(-1,5; -1,3)$, $(0; 0,5)$ и $(1; 1,3)$.

Заметим, что хотя, глядя на график, мы «сразу видим», что на отрезке $(1; 1,3)$ уравнение имеет корень, но чтобы строго это доказать, нам понадобилось бы следующее свойство непрерывных функций:

Если в концах отрезка $[a; b]$ функция принимает значения разных знаков, то где-то на этом отрезке она обращается в нуль (рис. 14).

Другими словами, если числа $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, то на отрезке $(a; b)$ лежит по крайней мере одно решение уравнения $f(x) = 0$.

Доказать это свойство мы сейчас не можем. Заметим только, что этим свойством обладает не всякая функция. Например, функция, график которой изображен на рис. 15, при $x > c$ не обращается в 0, однако она принимает значения

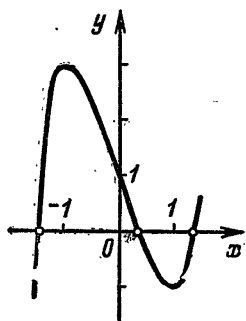


Рис. 13.

разных знаков: от c до d функция принимает отрицательные значения, а для $x > d$ — положительные. На картинке наглядно видна причина этого: график функции «рвется» при $x = d$. Мы не будем определять точно смысл этих слов: график функции не рвется, непрерывен или,

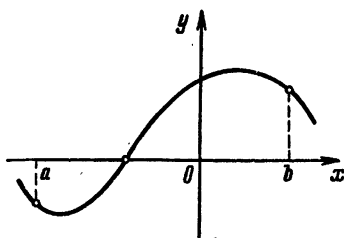


Рис. 14.

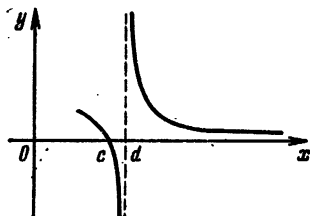


Рис. 15.

наоборот, рвется, — это довольно сложный вопрос, связанный, в частности, с уточнением понятий вещественного числа и предела ¹⁾. Для большинства функций, с которыми обычно приходится иметь дело, легко увидеть те точки (их обычно бывает немного), в которых график функции рвется.

Раньше — при решении уравнения $\sqrt{x} = (x - 1)^2$ — мы также пользовались соображениями непрерывности.

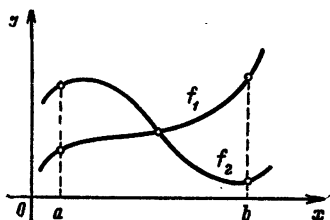


Рис. 16.

Поэтому наши утверждения о существовании корней этого уравнения будут строго доказанными, только если мы установим, что функции $y = \sqrt{x}$ и $y = (x - 1)^2$ непрерывны.

Заметим, что нам нужно было несколько более общее утверждение:

Если $f_1(a) < f_2(a)$, $f_1(b) > f_2(b)$ и функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрезке $[a; b]$ непрерывны, то уравнение $f_1(x) = f_2(x)$ имеет (по крайней мере одно) решение (рис. 16).

¹⁾ Для справедливости нашего свойства непрерывности очень существенно, что вещественные числа заполняют всю ось, т. е. что на оси нет «дырок». Если бы мы рассматривали только рациональные числа на оси, то, например, функция $y = x^2 - 2$ переходила бы от отрицательных значений (при $x = 0$) к положительным (при $x = 2$), не обращаясь в 0.

Это утверждение очевидным образом следует из первоначальной формулировки: достаточно переписать уравнение в виде $f_1(x) - f_2(x) = 0$.

Для графического решения часто бывает полезно переписать уравнение в виде $f_1(x) = f_2(x)$ с таким расчетом,

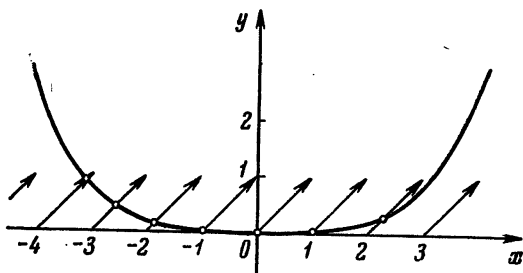


Рис. 17.

чтобы графики $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ было удобно построить.

Решим, например, такую задачу: сколько решений имеет уравнение

$$x^4 + 100[x] = 100x? \quad (4)$$

($[x]$ означает целую часть числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x ¹⁾).

Перепишем уравнение в таком виде:

$$\frac{x^4}{100} = x - [x].$$

Строим графики левой и правой частей (рис. 17): $y_1 = x^4/100$ и $y_2 = x - [x]$. Видно, что уравнение имеет семь решений: $x = 0$ и по одному на отрезках $(-4; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$.

Часто встречаются случаи, когда с помощью построения графиков и исследования функций f_1, f_2 удастся показать, что уравнение $f_1(x) = f_2(x)$ на каком-то отрезке не имеет решений или имеет не более одного решения и т. п.

¹⁾ Графики функций, в записи которых встречается $[x]$, рассматриваются в книге: И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль «Функции и графики», ч. I, из нашей серии.

Пример. Доказать, что уравнение

$$\sqrt[4]{1+x^4} = 4/x \quad (5)$$

имеет единственное решение.

При $x < 0$ уравнение (5) не имеет решений (левая часть больше 0, правая — меньше).

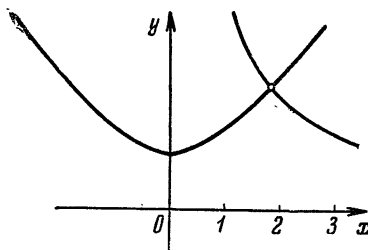


Рис. 18.

При $x > 0$ функция

$$y = \sqrt[4]{1+x^4}$$

возрастает, функция

$$y = 4/x$$

убывает (рис. 18).

Легко подсчитать, что при $x = 1$ значение первой функции меньше, чем значение второй, а при $x = 2$ — больше. Значит, на интервале $(1; 2)$ уравнение имеет корень.

Пусть x_0 — этот корень. Если $0 < x < x_0$, то

$$f_1(x) < f_1(x_0) = f_2(x_0) < f_2(x),$$

так что при $x < x_0$ уравнение не имеет решений.

Если $x > x_0$, то

$$f_1(x) > f_1(x_0) = f_2(x_0) > f_2(x),$$

т. е. при $x > x_0$ тоже нет решений.

Подобные рассуждения короче записывают так: если x меняется от 0 до $+\infty$, то $\sqrt[4]{1+x^4}$ монотонно возрастает от 1 до $+\infty$, а $4/x$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0, поэтому уравнение $\sqrt[4]{1+x^4} = 4/x$ имеет на $(0; +\infty)$ ровно одно решение.

УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Дайте графическую иллюстрацию к решению уравнений
2) — 4) § 5 (стр. 24).

9.2. Решить уравнения:

а) $|x+1| + |2x-3| = 5$; б) $|4-2|x|| = 1$;

дать графическую иллюстрацию (перед решением этой задачи рекомендуем заглянуть в книгу «Функции и графики»).

9.3. Решить уравнения:

$$a) \left[\frac{5 + 6x}{8} \right] = \frac{15x - 7}{5}; \quad б) \frac{x^2}{x - [x]} = \frac{1}{25}.$$

9.4. Найти число корней уравнения и указать отрезки, в каждом из которых находилось бы ровно по одному его корню:

$$a) -\frac{x^2 - 1/4}{x^2 + x^4} = x^2;$$

$$б) 1/2 |x + 1| - 1/2 |x - 1| = x^3 - 2x^2 + x;$$

$$в) x^2 - 3/2 = \frac{1}{[x]};$$

$$г) \sqrt{1 - x^2} = x^3;$$

$$д) |x^2 + 1| = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Трудные графики встречающихся здесь функций вы можете найти в книге «Функции и графики».

9.5. Заметьте, что в этом параграфе в наших рассуждениях при исследовании уравнений (2) и (4) был изъян: мы не доказали, что в каждом из интервалов находится ровно по одному корню (а не больше). Постарайтесь исправить эту неточность.

9.6. Решить уравнения:

$$a) \sqrt{x^3 + 8} = 3/x; \quad б) x^4 = 18 - |x|.$$

§ 10. Системы уравнений

Приведем примеры систем уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 2x = 4, \\ x^2 + 1 = 5; \end{cases} & 3) \begin{cases} x + y^2 = 5, \\ y + x^2 = 3; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1; \end{cases} & 4) \begin{cases} x + yx = 1, \\ x = 3y + 1. \end{cases} \end{array}$$

Решением системы называется набор чисел (набор значений аргументов), при подстановке которых каждое из уравнений системы обращается в верное равенство. Например,

$$\begin{array}{l} x = 2 \text{ — решение первой системы;} \\ x = 1, y = 0, z = 0 \text{ — решение второй системы;} \\ x = 0, y = 1, z = 0 \text{ — другое решение второй системы;} \\ x = 1, y = 2 \text{ — решение третьей системы.} \end{array}$$

Как правило, рассматриваются системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных (среди приведенных выше примеров это системы 3) и 4)). Такие системы обычно имеют конечное число решений.

Пр и м е р. Решить систему

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x - y) = 447, \\ xy(x - y) = 210. \end{cases}$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} xy = u, \\ x - y = v: \end{cases}$$

$$\begin{cases} (v^2 + 2u)v = 447, \\ uv = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^3 + 2uv = 447, \\ uv = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^3 = 27, \\ uv = 210 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 3, \\ u = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 70. \end{cases}$$

Числа x и $-y$ являются корнями квадратного уравнения¹⁾
 $t^2 - 3t - 70 = 0$; $t_1 = 10$, $t_2 = -7$; поэтому имеем

$$\begin{cases} x_1 = 10, \\ -y_1 = -7, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x_1 = 10, \\ y_1 = 7, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = -7, \\ -y_2 = 10, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x_2 = -7, \\ y_2 = -10. \end{cases}$$

Сделаем замечание относительно геометрической интерпретации решения систем. Рассмотрим снова систему

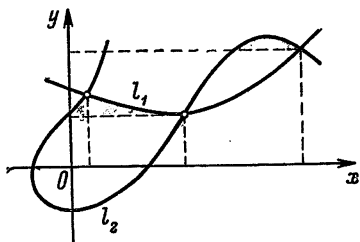


Рис. 19.

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Возьмем на плоскости с системой координат (рис. 19) множество точек l_1 , координаты которых удовлетворяют первому уравнению (в геометрии его называют кривой, задаваемой уравнением $f_1(x, y) = 0$);

l_2 — кривая, соответствующая второму уравнению. Решения системы соответствуют точкам пересечения кривых l_1 и l_2 .

В этих геометрических терминах удобно проводить исследование решений систем, а иногда и находить их приближенное решение. Вам должно быть известно геометрическое исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными (рис. 20):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

¹⁾ См. упражнение 10.4.

В случае а) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, (x_0, y_0) — единственное решение; в случае б) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ и либо $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$, либо $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$, решений нет; и в случае в) $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = 0$, решения заполняют прямую.

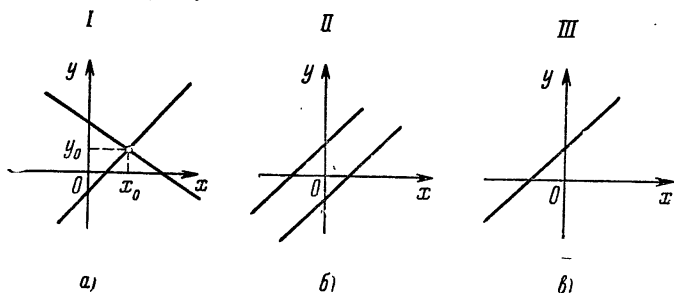


Рис. 20.

Исследуем на геометрическом языке систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, & a > 0, \\ x + y = b. \end{cases}$$

Первое уравнение системы — это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом a (рис. 21). Второе уравнение задает прямую l , проходящую через точки с координатами $(0; b)$ и $(b; 0)$. Сразу видно, что если прямая l пересекает окружность в двух точках, а это соответствует случаю а), когда ее расстояние до центра $|b|/\sqrt{2}$

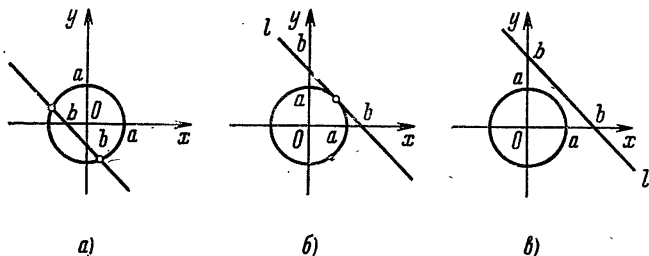


Рис. 21.

меньше \sqrt{a} , т. е. $|b| < \sqrt{2a}$, то система имеет два решения. Если же прямая l не пересекает окружности (случай в)), т. е. $|b| > \sqrt{2a}$, то система решений не имеет. При $|b| = \sqrt{2a}$ решение одно (рис. 21, б).

УПРАЖНЕНИЯ

10.1. Решить системы уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + v^2 = 4, \\ x^2 + v^2 + z^2 = 6, \\ v^2 + y^2 + z^2 = 7; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 9; \end{cases}$$

$$\text{B) } \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{10}{7}, \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{5}{8}, \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{40}{13}; \end{cases} \quad \text{r) } \begin{cases} \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}} = \frac{7}{2}, \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}} - \sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 32; \end{cases} \quad e) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$$

$$\text{ж)} \begin{cases} 5(x^4 + y^4) = 41(x^2 + y^2), \\ x^2 + xy + y^2 = 13; \end{cases} \quad \text{з)} \begin{cases} x^2 - yz = a, \\ y^2 - xz = b, \\ z^2 - ux = c; \end{cases}$$

$$\text{н) } \begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|; \end{cases} \quad \text{к) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\text{п) } \begin{cases} x + y = 1, \\ x^4 + y^4 = 97; \end{cases} \quad \text{м) } \begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2; \end{cases}$$

$$\text{н) } \begin{cases} (x^2 + xy + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} = 185, \\ (x^2 - xy + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} = 65; \end{cases} \quad \text{о) } \begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 133, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$$

п) $\begin{cases} x + y - z = 7, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 37, \\ x^3 + y^3 - z^3 = 1. \end{cases}$

10.2. Решить систему ста линейных уравнений со ста неизвестными:

[illegible]

10.3. а) Исследуйте систему (для каждой пары чисел a и b укажите, сколько решений имеет система, и найдите эти решения)

$$\begin{cases} y - ax = 0 \\ y = x^2 + b. \end{cases}$$

Дайте геометрическую иллюстрацию этой системы.

б) Докажите, что для того, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

не имела решений, необходимо и достаточно, чтобы числа

$$c + a, c - a, c + b, c - b$$

имели один и тот же знак (или, что то же самое, чтобы выполнялись одновременно неравенства $|a| < |c|$ и $|b| < |c|$).

10.4. Докажите, что решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q \end{cases} \quad (1)$$

сводится к решению уравнения

$$t^2 - pt + q = 0. \quad (2)$$

А именно, если уравнение (2) имеет два различных корня t_1 и t_2 , то система (1) имеет два решения:

$$\begin{cases} x = t_1, \\ y = t_2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = t_1, \\ x = t_2; \end{cases}$$

если уравнение (2) имеет одно решение $t_1 = t_2$, то система (1) имеет также одно решение $x = y = t_1$; если уравнение (2) не имеет решений, то и система (1) не имеет решений.

10.5. Докажите, что системы уравнений

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ \dots\dots \\ f_n = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f_1 + af_2 = 0, \\ f_2 = 0, \\ \dots\dots \\ f_n = 0 \end{cases}$$

(a — некоторое число) равносильны.

10.6. Доказать, что система, состоящая из одного уравнения $f_1^2 + f_2^2 = 0$, равносильна системе, состоящей из двух уравнений

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0. \end{cases}$$

ГЛАВА III

НЕРАВЕНСТВА

§ 11. Свойства неравенств

Возьмем два числа. Поставим между ними один из знаков $>$, $<$, \geq , \leq . Получим высказывание, называемое *числовым неравенством*.

Примеры.

- 1) $3 > 1$; 4) $10 \leq 10$;
2) $10 > 10$; 5) $5 \geq 1$;
3) $5 > 7$; 6) $3 \geq 5$.

Неравенства бывают верные и неверные. 1), 4), 5) — верные неравенства, остальные неравенства неверные.

В дальнейшем в этом параграфе мы будем говорить только о верных неравенствах и их свойствах.

Так как для любых двух чисел a и b либо $a > b$, либо $a = b$, либо $b > a$, то если a и b не равны, то ровно одно из неравенств $a > b$ и $b > a$ будет верным.

Если a больше b , а b больше c , то a больше c .
Это свойство запишем так:

$$T : a > b, b > c \Rightarrow a > c$$

(мы обозначили это свойство буквой T ; его часто называют *транзитивностью*.)

Именно это свойство отношения порядка позволяет нам нанести числа на ось.

Сформулируем еще свойства неравенства, связывающие их с арифметическими действиями.

$$A : a > b \Rightarrow a + c > b + c \text{ при любом } c.$$

$$B : a > b, b > 0 \Rightarrow ab > 0.$$

Сейчас мы перечислим еще ряд свойств неравенств, которые являются следствиями свойств Т, А, Б.

1. $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.
2. $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$.
3. $a > b \Rightarrow -a < -b$.
4. $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$.
5. $a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0$.
6. $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$.
7. $a > b, b > 0, c > d, d > 0 \Rightarrow ac > bd$.
8. $a > b, b > 0 \Rightarrow a^n > b^n, n$ — натуральное число.
9. $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Напомним, что $\sqrt[n]{a}$ при $a > 0$ обозначает единственное положительное число c такое, что $c^n = a$.

Все эти свойства легко доказываются последовательно, одно за другим.

Выведем, например, свойство 7 из предыдущих. Рассмотрим преобразования $ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c - d) + d(a - b)$. По условию $c > d$. Из свойства 1: $c > d \Rightarrow c - d > 0$. Точно так же $a > b \Rightarrow a - b > 0$. Далее, $(a > b, b > 0) \Rightarrow a > 0$ (свойство Т). $(a > 0, c - d > 0) \Rightarrow a(c - d) > 0$ (свойство Б). Точно так же $(d > 0, a - b > 0) \Rightarrow d(a - b) > 0$. Затем, $(a(c - d) > 0, d(a - b) > 0) \Rightarrow a(c - d) + d(a - b) > 0$ (свойство 6). Переписываем это неравенство так: $ac - bd > 0$. По свойству 1 $ac - bd > 0 \Rightarrow ac > bd$, что и требовалось доказать.

Можно доказать свойство 7 и по-другому. Так как $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bc$ (свойство 2), $bc > bd$ (свойство 2) и $ac > bd$ (свойство Т).

10. Если f — (строго) монотонная функция, определенная в точках a и b , то

$a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$, если f возрастает,

и

$a > b \Rightarrow f(a) < f(b)$, если f убывает.

Это просто определение строго монотонной функции (стр. 22).

Кроме неравенств вида $a > b$ изучают и высказывания вида $a \geq b$, которые читаются так: « a больше или равно b ».

Мы не будем выводить свойства отношения \geq . Заметим, что свойства Т, А, Б, будучи справедливыми для

строгих неравенств и для равенств, остаются справедливыми и для нестрогих неравенств. К этим основным свойствам добавляется еще одно, свойство Р: $a \geq a$ (которое, конечно, всегда верно, хотя и звучит непривычно). Буквой Р оно обозначено потому, что такое свойство отношений обычно называют *рефлексивностью*. Это свойство не выполняется для строгих неравенств. Все свойства 1—10 строгих неравенств остаются верными, если всюду заменить строгие неравенства нестрогими.

УПРАЖНЕНИЯ

11.1. Верны ли неравенства:

- а) $0 \geq 3$; в) $\sqrt[3]{2} > \sqrt[7]{5}$;
 б) $\frac{7}{15} > \frac{8}{17}$; г) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} > (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$;

11.2. Выведите свойства 1—9 из основных (Т, А и Б).

11.3. Верны ли утверждения:

- а) $\frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$;
 б) $\frac{b}{a} \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$;
 в) $a^2 < b^2 \Rightarrow |a| < |b|$;
 г) $b \leq 0 \Rightarrow b^n \leq 0$, n — натуральное число;
 д) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow a < b$?

В каких из них можно поставить стрелки и в обратную сторону?

§ 12. Условные неравенства

Пусть нам даны две функции f_1 и f_2 . Если поставить между $f_1(x)$ и $f_2(x)$ один из знаков неравенства ($>$, $<$, \geq , \leq), получается условное неравенство¹⁾.

Примеры.

$$x^2 + 2\sqrt{y} > x; \quad x > 1, y \in (0; 3); \quad (1)$$

$$2x + 3 > 1; \quad (2)$$

$$x \geq \sqrt{x-1}. \quad (3)$$

В примере (1) справа указана область определения функций, образующих неравенство. В примерах (2) и (3),

¹⁾ Таким образом, условное неравенство — это высказывательная форма для числовых неравенств.

где этого не сделано, имеется в виду естественная область определения. Так, в примере (2) — это множество всех вещественных чисел, в примере (3) — луч $[1; +\infty)$.

Решением условного неравенства называется такое значение аргумента (или набор значений аргументов в случае неравенств с несколькими неизвестными), при подстановке которого в данное условное неравенство оно обращается в верное (числовое) неравенство. Например, $x = 2$ есть решение неравенства (3); пара чисел $(3, 1)$ — решение неравенства (1), в то время как пара чисел $(0, 2)$ решением этого неравенства не является, так как не входит в его область определения.

Два условных неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Т е о р е м а 1. Если к обеим частям условного неравенства прибавить одну и ту же функцию, то получится неравенство, равносильное данному.

Т е о р е м а 2. а) Если обе части условного неравенства умножить на одну и ту же функцию, все значения которой в области определения данного неравенства строго положительны, то получится неравенство, равносильное данному.

б) Если все значения функции, на которую мы умножаем обе части неравенства, строго отрицательны, то, изменив знак неравенства на противоположный, мы также получим неравенство, равносильное данному.

Т е о р е м а 3. Если в обеих частях неравенства стоят функции, все значения которых в области определения неравенства положительны, то, возводя обе части неравенства в степень n (n — натуральное число) или извлекая корень n -й степени из обеих частей, мы получим неравенство, равносильное данному.

При применении всех этих теорем очень важно следить за тем, чтобы область определения неравенства сохранялась, хотя мы и не оговаривали этого специально в условии (см. замечание на стр. 31 в § 6).

Доказательство этих трех теорем проводится аналогично доказательству соответствующих теорем об уравнениях (см. стр. 30—31) с использованием свойств верных числовых неравенств из § 11.

Докажем для примера теорему 2б. По условию имеется неравенство

$$f(x) > \varphi(x), \quad x \in E, \quad (4)$$

и функция g , причем $g(x) < 0$ для всех $x \in E$. Требуется доказать, что

$$f(x) > \varphi(x) \Leftrightarrow g(x)f(x) < g(x)\varphi(x). \quad (5)$$

Пусть число $x \in E$ является решением неравенства (4), т. е. $f(x_0) > \varphi(x_0)$. Это верное числовое неравенство. Но $g(x_0) < 0$, следовательно, $g(x_0)f(x_0) < g(x_0)\varphi(x_0)$ тоже верное числовое неравенство (см. свойство 4, стр. 63), т. е. x_0 является решением неравенства (5).

Обратно, пусть x_0 — решение неравенства (4), т. е. верно неравенство $g(x_0)f(x_0) < g(x_0)\varphi(x_0)$; по тому же свойству 4, умножив обе части этого неравенства на число $1/g(x_0) < 0$, мы получим верное неравенство $f(x_0) > \varphi(x_0)$. Остальные теоремы (1, 2а и 3) докажите самостоятельно.

Приведем еще одну теорему, которая обобщает теорему 3.

Т е о р е м а 4. Если к обеим частям условного неравенства $f(x) > g(x)$ применить функцию h , которая определена при всех значениях функций f и g и (строго) монотонна (см. стр. 22), то исходное неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned} h(f(x)) &> h(g(x)) \quad (\text{для возрастающей } h), \\ h(f(x)) &< h(g(x)) \quad (\text{для убывающей } h). \end{aligned}$$

Приведем примеры использования перечисленных теорем для решения неравенств.

$$1) \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} < 1.$$

В обеих частях этого неравенства стоят функции, определенные на множестве всех чисел. Функция $x \rightarrow \sqrt{x^4+1}$ положительна при всех x , поэтому (теорема 2а)

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} < 1 \Leftrightarrow x^2 < \sqrt{x^4+1}.$$

Обе части неравенства принимают только положительные значения, поэтому (теорема 3)

$$\sqrt{x^4+1} > x^2 \Leftrightarrow x^4+1 > x^4.$$

Решением последнего неравенства является, очевидно, любое число, так как (по теореме 1) $x^4+1 > x^4 \Leftrightarrow 1 > 0$.

Следовательно, и множество решений исходного неравенства — вся числовая ось: $X = (-\infty; +\infty)$.

$$2) \sqrt{x^4 - 1} < x^2.$$

Здесь тоже можно возвысить обе части неравенства в квадрат:

$$\sqrt{x^4 - 1} < x^2 \Leftrightarrow x^4 - 1 < x^4,$$

но у полученного неравенства естественная область определения шире, чем у первоначального; поэтому обязательно нужно рядом с неравенством $x^4 - 1 < x^4$ написать ограничения (указать область определения) $x^4 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Это и будет ответ, поскольку само неравенство $x^4 - 1 < x^4$ выполняется при всех x .

$$3) \sqrt{x^2 - 1} > x.$$

Областью определения неравенства является то же самое множество $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Если возвести обе части данного неравенства в квадрат, то получится неравенство, не имеющее решений. Однако это еще не означает, что исходное неравенство не имеет решений (подставьте, например, $x = -2$ и убедитесь в противном). Так как при возведении в квадрат мы не получаем в этом случае равносильного неравенства (подумайте, почему здесь неприменима теорема 3), придется рассуждать иначе.

Предположим, что x_0 есть решение неравенства, т. е.

$$\sqrt{x_0^2 - 1} > x_0.$$

Мы хотим возвести это числовое неравенство в квадрат. Нам известно (свойство 8 верных числовых неравенств), что при возведении в квадрат верного неравенства, в обеих частях которого стоят положительные числа, получается снова верное неравенство. В левой части неравенства стоит положительное число. Если в правой части стоит положительное число, т. е. если $x_0 > 0$, то неравенство $x_0^2 - 1 > x_0^2$ должно быть верным. Но из него вытекает, что $-1 > 0$, это неверно. Значит, сделанное предположение о том, что положительное число x_0 является решением неравенства, привело нас к противоречию. Следовательно, положитель-

ных решений у неравенства нет. Легко убедиться, с другой стороны, что каждое отрицательное число (из области определения) является решением нашего неравенства.

Коротко можно записать эти рассуждения так: на множестве $(-\infty; -1]$ неравенство $\sqrt{x^2 - 1} > x$ выполняется тождественно, а на множестве $[1; +\infty)$ оно эквивалентно неравенству $x^2 - 1 > x^2$, у которого нет решений. Итак, ответом будет множество $X = (-\infty; -1]$.

Подобный прием — разбиение области определения неравенства на два или несколько множеств, на каждом из которых удастся заменить его равносильным, но более простым, — как мы увидим дальше, часто применяется при решении неравенств. Теорема 4 из § 6 (стр. 32) будет, очевидно, верна, если в ней заменить слово «уравнение» на *неравенство*.

К решению неравенств, конечно, полностью относится и важное замечание в конце § 6.

Вы заметили, видимо, что определения, касающиеся уравнений и неравенств, строились параллельно:

равенство	— (числовое)	неравенство,
верное, неверное равенство	— верное, неверное	неравенство,
уравнение	—	условное неравенство,
решение (корень) уравнения	—	решение неравенства,
равносильность уравнений	—	равносильность неравенств,
тождество	—	тождественное неравенство.

К сожалению, в терминах такого параллелизма нет. Для условных равенств придумано специальное слово — «уравнение», а для условных неравенств специального слова нет; так же и с тождествами. В дальнейшем, когда мы будем писать просто слово *неравенство*, мы будем иметь в виду условное неравенство. Это не страшно, поскольку всякое числовое неравенство $a > b$, в двух частях которого стоят две постоянные функции $y = a$, $y = b$, можно считать условным.

УПРАЖНЕНИЯ

12.1. Равносильны ли следующие неравенства:

- $x^3 \leq 1$ и $x \leq 1$;
- $\sqrt{x-1} < x$ и $x-1 \leq x^2$;
- $\sqrt{x-1} \geq x$ и $x-1 \geq x^2$;

$$\text{г) } \frac{x^3 - x - 1}{x^3 + x + 1} > 0 \text{ и } x^6 - x^3 - 2x - 1 > 0;$$

$$\text{д) } \frac{x^3 - x - 1}{x^3 + x + 1} \geq 0 \text{ и } x^6 - x^3 - 2x - 1 \geq 0?$$

12.2. Найдите все ошибки в следующем «решении» неравенства (а затем решите его правильно)

$$\sqrt{\frac{x^3 + 8}{x}} > x - 2.$$

Найдем область определения:

$$\begin{cases} x^3 + 8 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^3 + 8 < 0, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x < 0. \end{cases}$$

Область определения: $(-\infty; 0] \cup [-2; +\infty)$.

Теперь преобразуем данное неравенство (заменяем его равносильными):

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 8}{x} &> x^2 - 4x + 4 \\ &\Updownarrow \\ x^3 + 8 &> x^3 - 4x^2 + 4x \\ &\Updownarrow \\ 4x^2 - 4x + 8 &> 0 \\ &\Updownarrow \\ x^2 - x + 2 &> 0. \end{aligned}$$

Корни уравнения $x^2 - x + 2 = 0$: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$. Решения последнего неравенства: $-1 < x < 2$, т. е. $x \in (-1; 2)$.

Выберем теперь значения x , принадлежащие области определения.

О т в е т: $X = [-1; 0]$.

§ 13. Неравенства с одним неизвестным

Начнем с линейного неравенства, т. е. неравенства вида $ax + b > 0$ (a и b — числа, $a \neq 0$).

Множество его решений можно, очевидно, записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} a > 0 &\Rightarrow X = (-b/a; +\infty), \\ a < 0 &\Rightarrow X = (-\infty; -b/a). \end{aligned}$$

Этот результат можно представить себе так: линейная функция $f(x) = ax + b$ сохраняет постоянный знак на каждом из двух лучей, на которые точка $x = -b/a$ — единственный корень уравнения $f(x) = 0$ — делит числовую ось, и меняет знак при переходе через этот корень. Легко это изобразить графически (рис. 22).

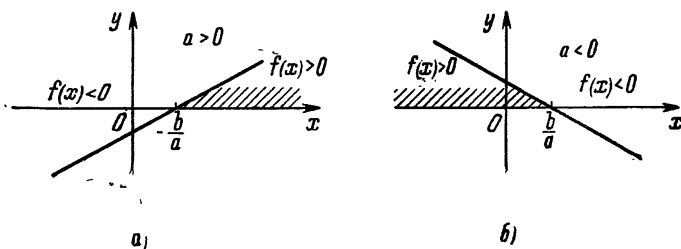


Рис. 22.

Несложно решаются и неравенства вида $f(x) > 0$, где функция $f(x)$ раскладывается в произведение линейных множителей.

Рассмотрим такой пример:

$$x(x - 1)(x + 1)(2x + 3) > 0.$$

Нанесем на числовую ось корни линейных множителей (рис. 23). На каждом из пяти получившихся отрезков каждый из множителей (а значит, и все произведение)

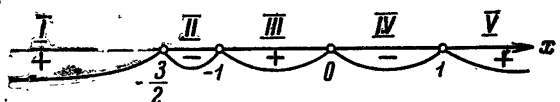


Рис. 23.

сохраняет постоянный знак. Чтобы найти его, достаточно вычислить значения левой части в какой-либо точке отрезка.

I. $x = -2 \Rightarrow f(x) > 0.$

II. $x = -5/4 \Rightarrow f(x) < 0.$

III. $x = -1/2 \Rightarrow f(x) > 0.$

IV. $x = 1/2 \Rightarrow f(x) < 0.$

V. $x = 2 \Rightarrow f(x) > 0.$

Ответ: $X = (-\infty; -3/2) \cup (-1; 0) \cup (1; +\infty).$

Случайно ли у нас произошло чередование знаков? Конечно, нет. В точках $-\frac{3}{2}$, -1 , 0 , 1 менял знак ровно один множитель. Заметив это, можно не вычислять значения функции во внутренней точке отрезка, а, начав с любой точки, где знак произведения очевиден, следить за

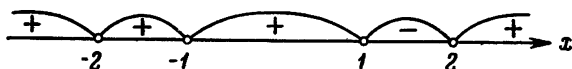


Рис. 24.

изменением знака при переходе через корни. При этом надо быть осторожным, так как может в какой-то точке обратиться в нуль четное число линейных множителей и изменения знака не произойдет.

Точно так же решаются и рациональные неравенства вида

$$f(x)/g(x) > 0,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ раскладываются на линейные множители. Здесь только надо не забывать, что корни знаменателя играют особую роль — в них исходная функция не определена.

П р и м е р. Решим неравенство

$$\frac{3(x-1)(x+2)^2}{(x^2+1)(x+1)^2(x-2)} > 0.$$

Наносим на ось корни числителя и знаменателя (рис. 24) и читаем ответ ¹⁾:

$$X = (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty).$$

Наши предыдущие рассуждения имеют наглядный геометрический смысл. Пусть надо решить неравенство $f(x) \geq 0$. Нарисуем график функции $y = f(x)$ (рис. 25). Эта функция непрерывна всюду, кроме точки d ; область определения ее мы можем записать так: $(-\infty; d) \cup (d; +\infty)$.

Нас интересуют точки x , где $f(x) \geq 0$, т. е. точки графика функции, лежащие выше оси x или на оси x . Легко

¹⁾ Подумайте, какую ошибку мы совершили бы, «вычеркнув» в неравенстве неотрицательные множители $(x+2)^2$ и $(x+1)^2$, и почему можно «вычеркнуть» множитель x^2+1 ?

перечислить участки изменения x , которые соответствуют таким точкам. Это три отрезка: $[a; b]$, $[c; d)$ и $[e; g]$. Ответ можно записать в виде объединения этих отрезков:

$$X = [a; b] \cup [c; d) \cup [e; g].$$

Наша геометрическая картинка подсказывает следующий способ решения неравенства $f(x) \geq 0$: нужно разбить числовую ось на отрезки, в которых функция $y = f(x)$ сохраняет знак; на такие отрезки ось Ox

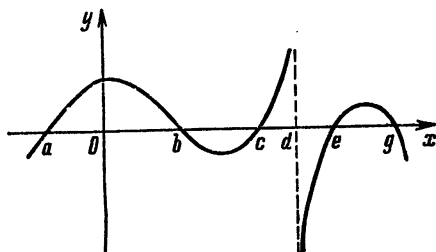


Рис. 25.

делится, во-первых, точками, в которых значение функции равно нулю: $x = a$, $x = b$, $x = c$, $x = e$, $x = g$, и, во-вторых, точками, где функция не определена, график ее разрывается: $x = d$.

Для более строгого обоснования такого способа решения неравенств нам хотелось бы иметь следующее свойство функции: *если на каком-нибудь отрезке функция не обращается в нуль, то имеет на этом отрезке постоянный знак*. Разумеется, это одно из тех свойств непрерывности, о которых мы говорили в параграфе о графическом решении уравнений (§ 9, стр. 52). В начале этого параграфа мы применяли его для линейной функции. Напомним, что для непрерывных функций оно заведомо верно, но если график функции в некоторых точках «рвется», то нужно отметить все такие точки и исследовать функцию отдельно на каждом из отрезков, на которые эти точки делят ось.

Обратим еще внимание на неравенства, содержащие абсолютную величину. Нового, конечно, в них нет ничего. Например, нетрудно решить неравенство $x - 1 < |x^2 - 5x + 4|$, нарисовав графики функций $y = x - 1$ и $y = |x^2 - 5x + 4|$ и затем найдя нужные отрезки.

В то же время полезно научиться быстро ориентироваться в неравенствах типа $|x| < a$, $|x - a| \geq b$ и т. д. Эти неравенства разбирались в книжке «Метод координат»¹⁾ из нашей серии. Напомним, что число $|x - y|$ равно расстоянию между точками на числовой оси, соответствующими числам x и y . Из этого сразу вытекает, что неравенству $|x| < a$ при $a > 0$ удовлетворяют точки, расстояния которых до начала координат меньше a , т. е. точки

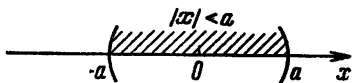


Рис. 26.

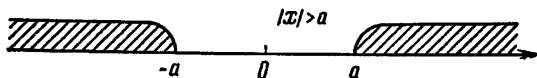


Рис. 27.

отрезка $(-a; a)$ (рис. 26). Легко убедиться, что решение неравенства $|x| > a$ при $a > 0$ (рис. 27) выглядит так:

$$x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty).$$

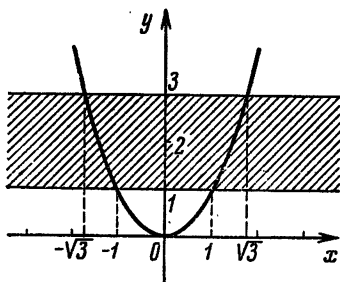


Рис. 28.

С помощью этих рассуждений можно быстро решить такое, например, неравенство: $|x^2 - 2| \leq 1$.

Нарисуем график функции $y = x^2$ (рис. 28). Неравенство можно прочесть так: $|y - 2| \leq 1$, т. е. расстояние от y до 2 не должно превосходить чис-

ла 1. Это будет верно для точек графика, лежащих в полосе между прямыми $y = 1$ и $y = 3$. Рисуем эту полосу и находим нужные отрезки на оси x :

$$X = [-\sqrt{3}; -1] \cup [1; \sqrt{3}].$$

¹⁾ И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов, Метод координат, «Наука», изд. 3, 1968.

В заключение разберем решение двух неравенств.

$$1) \frac{|2x-1|}{x^2+x-2} \geq 3.$$

а) Решим неравенство на интервале $(-\infty; 1/2)$.

Для всех $x \in (-\infty; 1/2)$ имеем $|2x-1| = 1-2x$.

$$\begin{aligned} \frac{1-2x}{x^2+x-2} \geq 3 &\Leftrightarrow \frac{1-2x}{x^2+x-2} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3x^2+5x-7}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3(x-x_1)(x-x_2)}{(x+2)(x-1)} \leq 0, \end{aligned}$$

где корни числителя

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{109}}{6}; \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{109}}{6}.$$

Наносим на числовую ось корни числителя и знаменателя, попадающие в рассматриваемый интервал $x < 1/2$

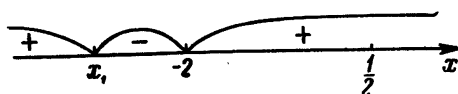


Рис. 29.

(рис. 29). (Заметим, что $x_1 < -2$.) Итак, решениями неравенства 1) на интервале $(-\infty; 1/2)$ являются

$$x \in \left[\frac{-5 - \sqrt{109}}{6}; -2 \right).$$

б) Осталось рассмотреть интервал $[1/2; +\infty)$.

Для всех этих $x \in [1/2; +\infty)$ выражение $|2x-1|$ равно $2x-1$. Далее имеем

$$\frac{2x-1}{x^2+x-2} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{3x^2+x-5}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3(x-x_1)(x-x_2)}{(x+2)(x-1)} \leq 0,$$

$$\text{где } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{61}}{6}; \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{61}}{6}.$$

Решения этого неравенства, входящие в интервал $[1/2; +\infty)$, образуют интервал

$$\left(1; \frac{-1 + \sqrt{61}}{6} \right].$$

$$\text{Ответ: } X = \left[\frac{-5 - \sqrt{109}}{6}; -2 \right) \cup \left(1; \frac{-1 + \sqrt{61}}{6} \right].$$

$$2) 4(x-1) < \sqrt{(x+5)(3x+4)}.$$

Выясним область определения неравенства:

$$(x+5)(3x+4) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [-4/3; +\infty).$$

Так как неизвестен знак левой части неравенства, возведение обеих частей неравенства в квадрат может привести к неравносильному неравенству. Поэтому следует рассмотреть два случая.

$$a) x < 1.$$

При этих значениях x слева стоит отрицательное число, а справа — неотрицательное; наше неравенство верно при всяком допустимом x , т. е. в этом случае решение таково:

$$X = (-\infty; -5] \cup [-4/3; 1).$$

$$б) x \geq 1.$$

$$\begin{aligned} 4(x-1) < \sqrt{(x+5)(3x+4)} &\Leftrightarrow 16x^2 - 32x + 16 < 3x^2 + \\ &+ 15x + 4x + 20 \Leftrightarrow 13(x + 1/13)(x - 4) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (-1/13; 4). \end{aligned}$$

В этом случае решение — интервал $[1; 4)$.

Окончательный ответ:

$$X = (-\infty; -5] \cup [-4/3; 1] \cup [1; 4) = (-\infty; -5] \cup [-4/3; 4).$$

УПРАЖНЕНИЯ

13.1. Решить неравенства, построив графики соответствующих функций:

$$a) \left| \frac{x+1}{3-2x} \right| > 1; \quad б) |x^2 - 3x + 2| - 1 > x - 2; \quad в) \sqrt{x+2} > x.$$

13.2. Решить неравенства:

$$a) \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2}; \quad б) \frac{x^3+15}{x^3+8} < 2;$$

$$в) \frac{(x-1)^2(x+3)}{x-5} \geq 0; \quad г) \sqrt{x^2-3x+2} \geq 2-x;$$

$$д) \sqrt{x-\sqrt{x-1/4}} \geq 1/4; \quad е) \frac{x-\sqrt{x-2}}{x+\sqrt{x+2}} < 0;$$

$$ж) \sqrt{1-x} \leq \sqrt[4]{5-x}; \quad з) \sqrt{x^2-x+1} \leq x^2+x-1;$$

$$и) \sqrt{\frac{2-x}{x+3}} > \frac{x}{2}; \quad к) x^2-2x+3 < \sqrt{4-x^2};$$

$$л) x^{1971} < x.$$

13.3. Равносильны ли неравенства:

- а) $\sqrt{x^3 + x - 2} > x$ и $x^3 + x - 2 > x^2$;
б) $\sqrt{x^3 + x - 2} < x$ и $x^3 + x - 2 < x^2$?

13.4. Доказать неравенства:

- а) $x(1-x) \leq 1/4$;
б) $x^4 + (1-x)^4 \geq 1/8$;
в) $x + 1/x \geq 2$, $x \in (0; +\infty)$;
г) $|x + \sqrt{1-x^2}| \leq 2$, $x \in [-1; 1]$;
д) $\sqrt{1+x} \leq 1 + x/2$, $x \in [-1; +\infty)$;
е) $(1+x)^n > 1 + nx$, $x \in (0; \infty)$, n — натуральное;
ж) $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $x \in [-1; \infty)$, n — натуральное.

§ 14. Неравенства с двумя неизвестными

Неравенство с двумя неизвестными можно представить так: $f(x, y) > 0$, где f — функция двух аргументов x и y . Если мы рассмотрим уравнение $f(x, y) = 0$, то множество точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, образует, как правило, некоторую кривую, которая разобьет плоскость на две или несколько областей. В каждой из этих областей функция f сохраняет знак, — остается выбрать те из них, в которых $f(x, y) > 0$.

Мы познакомимся только с самыми простыми неравенствами с двумя неизвестными.

Рассмотрим прежде всего неравенство $ax + by + c > 0$. Если какой-нибудь из коэффициентов a или b отличен от нуля, то уравнение $ax + by + c = 0$ задает прямую, разбивающую плоскость на две полуплоскости. В каждой из них будет сохраняться знак функции $f(x, y) = ax + by + c$. Для определения этого знака достаточно взять любую точку этой полуплоскости и вычислить значение функции f в этой точке. Например, чтобы нарисовать на плоскости множество точек (x, y) , удовлетворяющих неравенству $5x - 2y + 6 > 0$, нужно начертить прямую $5x - 2y + 6 = 0$ и взять все точки полуплоскости под этой прямой (рис. 30); чтобы убедиться, что именно *под*, а не *над*, мы нашли значение функции $f(x, y) = 5x - 2y + 6$ в точке $(0, 0)$: $f(0, 0) = 6 > 0$.

На рис. 31 показано решение еще одного простого неравенства: $x^2 + y^2 > 1$; чтобы решить его, достаточно рассмотреть функцию $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Если нужно решать системы неравенств с двумя неизвестными, то решают графически каждое из неравенств системы, а затем находят общую часть (пересечение)

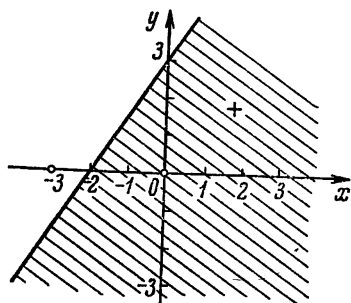


Рис. 30.

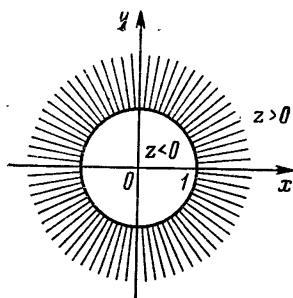


Рис. 31.

получившихся частей плоскости. Здесь несколько высказываний соединены союзом и. Решим графически, например, такую систему двух неравенств:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6 > 0, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Пусть $f_1(x, y) = 3x - 2y + 6$, $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 4$.

В заштрихованном куске (рис. 32) одновременно выполняются нужные нам неравенства $f_1 > 0$ и $f_2 \leq 0$ (кусочек окружности, ограничивающий заштрихованную область, входит в решение, а отрезок прямой — нет).

На рис. 33—37 приведены примеры графического решения наиболее часто встречающихся неравенств с двумя неизвестными.

УПРАЖНЕНИЯ

14.1. Дать графические решения неравенств:

- | | |
|----------------------------|----------------------------------|
| а) $y - 2x \geq 1$; | б) $x + y \leq 1$; |
| в) $ x + y > 1$; | г) $ x - y - 1 > 2$; |
| д) $x^2 \geq y^2$; | е) $x + y \leq y^2$; |
| ж) $y^2 + x \geq 2$; | з) $\sqrt{y+2} \geq x$; |
| и) $\sqrt{2-x} \leq y$; | к) $x^2 + y^2 \geq x + y$; |
| л) $\sqrt{4-x^2} \leq y$; | м) $\sqrt{1-x^2-y^2} \geq 1/2$; |
| н) $xy \geq 1$; | о) $xy \leq -2$; |
| п) $y \geq 1/x$; | р) $x + 1/x > y$; |
| с) $x^2 > xy + 1$. | |

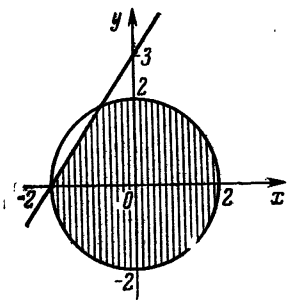


Рис. 32.

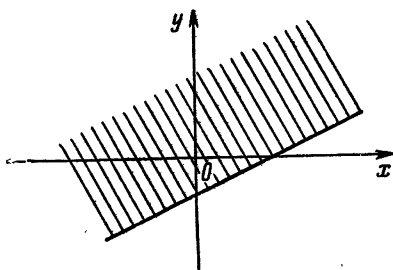


Рис. 33. $ax + by + c \geq 0$

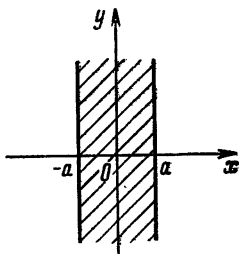


Рис. 34. $|x| \leq a$

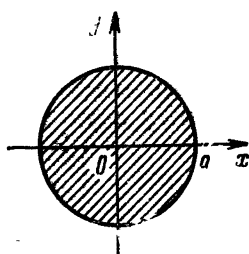


Рис. 35. $x^2 + y^2 \leq a^2$

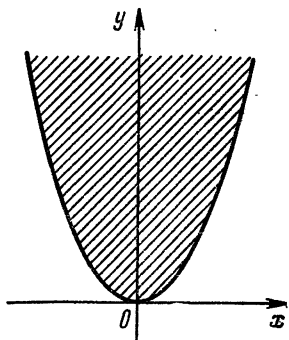


Рис. 36. $y \geq x^2$

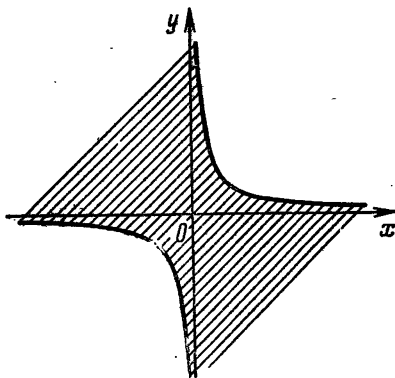


Рис. 37. $xy \leq 1$

14.2. Решить графически неравенства, приводя их к системе неравенств:

- а) $xy > 0$; б) $x^2 - y^2 < 0$;
в) $(x - 2)(x - 2y) < 0$; г) $x^2 - x \leq y - xy$;
д) $x^3 + y^3 + 1 > 3xy$; е) $1/x + 1/y > 0$.

14.3. Дать графическое решение систем неравенств

- а) $\begin{cases} 2x - y + 2 > 0, \\ x + y + 1 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x > 2y, \\ xy < 1; \end{cases}$
в) $\begin{cases} y + x^2 < 0, \\ y - x^2 > 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ |x| < 1, \\ |y| > 1. \end{cases}$

§ 15. Уравнения и неравенства с параметрами

Как правило, наиболее интересная часть решения реальной физической задачи — выяснить, как зависит ответ от параметра.

Если встать на формальную точку зрения, то никаких специальных уравнений или неравенств «с параметрами» нет.

Скажем, уравнение $x^2 + x + a = 0$ следует понимать как уравнение с двумя неизвестными x и a . В левой части его стоит функция двух аргументов $y = f(x; a) = x^2 + x + a$. Множество решений такого уравнения — множество пар чисел, при подстановке которых получается верное равенство. Однако иногда мы говорим о решении уравнения относительно x , т. е. считаем аргументы x и a неравноправными и хотим выразить x через a . Можно сказать по-другому: мы хотим иметь ответ в таком виде, чтобы для каждого значения a было указано, какие числа x в паре с этим a дают решения.

В задачах с реальным физическим содержанием неравноправие аргументов — разделение их на «неизвестные» и «параметры» — для нас естественно. Чтобы подчеркнуть различную роль аргументов, мы будем параметры обозначать, как правило, первыми буквами латинского алфавита (a, b, c, \dots), а неизвестные — последними (\dots, x, y, z).

В основу решения задач с параметрами может быть положен следующий принцип: значение параметра (или параметров, если их несколько) считается произвольно фиксированным, и затем ищется решение задачи так, как

мы это делали, обращаясь с уравнениями и неравенствами с одним неизвестным. Ответом должно быть перечисление решений для каждого допустимого значения параметра.

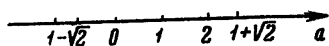
Например, ответ при решении неравенства $\sqrt{x} \leq a$ лучше всего записать так: при $a \in (-\infty; 0)$ решений нет; при $a \in [0; +\infty)$ $X = [0; a^2]$.

Надо заметить еще следующее: выяснение зависимости решений от значений параметра есть часть процесса решения задачи. Иногда ее называют исследованием и отделяют от непосредственного решения. Привыкайте к тому, что если вы решили задачу без исследования, то вы ее вовсе не решили.

Мы разберем решение квадратного уравнения с одним параметром:

$$ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0.$$

Прежде всего рассмотрим случай $a = 0$ (при этом значении обычная схема решения квадратного уравнения не действует). Уравнение принимает вид



$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Рис. 38.

Пусть теперь $a \neq 0$. Существование и число корней квадратного уравнения зависят от его дискриминанта. Вычислим дискриминант ¹⁾ $D = (a+1)^2 - 2a^2 = -a^2 + 2a + 1$; как многочлен от a , D имеет корни $a_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $a_2 = 1 + \sqrt{2}$. Нанесем на числовую ось a полученные точки (рис. 38).

Если $D < 0$, т. е. $a \in (-\infty; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$, то уравнение не имеет решений.

При $D = 0$, т. е. при $a = 1 - \sqrt{2}$ и при $a = 1 + \sqrt{2}$, уравнение имеет один корень: $x = -\frac{a+1}{a}$. Подставим значения a . При $a = 1 + \sqrt{2}$ получим $x = -\sqrt{2}$; при $a = 1 - \sqrt{2}$ $x = \sqrt{2}$.

¹⁾ Здесь и ниже, где это удобно, мы считаем дискриминант D уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равным

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \frac{b^2 - 4ac}{4}.$$

При $D > 0$, т. е. при $a \in (1 - \sqrt{2}; 0) \cup (0; 1 + \sqrt{2})$, уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-(a+1) + \sqrt{D}}{a}; \quad x_2 = \frac{-(a+1) - \sqrt{D}}{a}.$$

О т в е т.

Если:

$a \in (-\infty; 1 - \sqrt{2})$, корней нет;

$a = 1 - \sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$;

$a \in (1 - \sqrt{2}; 0)$, $x_1 = \frac{-(a+1) + \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a}$,

$x_2 = \frac{-(a+1) - \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a}$;

$a = 0$, $x = 0$,

$a \in (0; 1 + \sqrt{2})$, $x_1 = \frac{-(a+1) + \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a}$,

$x_2 = \frac{-(a+1) - \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a}$;

$a = 1 + \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$;

$a \in (1 + \sqrt{2}; +\infty)$, корней нет.

Приучите себя записывать ответ, перечисляя все значения параметра в порядке возрастания.

Теперь мы решим одно неравенство с параметром. Наберитесь, пожалуйста, терпения, потому что формальное решение его довольно утомительно. Но если вы не проделаете сейчас все выкладки, вы не сможете оценить другое решение этого примера, которое будет приведено в следующем параграфе. Итак, решим неравенство

$$\sqrt{2x+a} \geq x.$$

Естественная область определения $^1) 2x + a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -a/2$.

Рассмотрим два случая:

1) $x < 0$. Тогда все пары (x, a) , входящие в область определения, являются решениями.

¹⁾ Напомним, что область определения уравнения или неравенства с двумя неизвестными x и a — множество пар (x, a) , при которых определены составляющие его функции.

2) $x \geq 0$. Тогда

$$\sqrt{2x+a} \geq x \Leftrightarrow 2x+a \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - a \leq 0.$$

Исследуем дискриминант получившегося трехчлена:
 $D = 1 + a$.

2a) $a < -1$ — решений нет.

$$2б) a \geq -1: \quad 1 - \sqrt{a+1} \leq x \leq 1 + \sqrt{a+1}.$$

Однако теперь надо согласовать полученное с условиями $x \geq 0$ и $x \geq -a/2$. Иными словами, надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{a+1} \leq x \leq 1 + \sqrt{a+1}, \\ x \geq 0, \\ x \geq -a/2, \\ a \geq -1. \end{cases}$$

x должен быть больше (или равен) каждому из трех чисел 0 , $-a/2$, $1 - \sqrt{a+1}$. Нам надо знать, как они расположены на числовой оси в зависимости от a . Сначала выясним, когда первое из этих чисел больше третьего:

$$0 > 1 - \sqrt{a+1} \Leftrightarrow \sqrt{a+1} > 1 \Leftrightarrow a > 0.$$

Заметим, что при этих же a первое число больше и второго. Итак, случай 2б) разбивается на два:

2б') $a > 0$. В этом случае из трех исходных чисел самым большим является первое — число 0 . Остаются условия $x \geq 0$ и $x \leq 1 + \sqrt{a+1}$. Итак, в этом случае

$$x \in [0; 1 + \sqrt{a+1}].$$

2б'') $-1 \leq a \leq 0$. Сейчас заведомо первое число меньше и второго и третьего. Сравним второе и третье:

$$-\frac{a}{2} > 1 - \sqrt{a+1} \Leftrightarrow \sqrt{a+1} > 1 + \frac{a}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+1 > 1 + a + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} < 0,$$

что не выполняется ни при каких a . Итак, в этом случае третье число — наибольшее. Получим

$$x \in [1 - \sqrt{a+1}; 1 + \sqrt{a+1}].$$

Соберем все вместе.

Ответ. Если: $a < -1$, решений нет;

$$-1 \leq a \leq 0, \quad X = [1 - \sqrt{a+1}; 1 + \sqrt{a+1}];$$

$$a > 0, \quad X = \left[-\frac{a}{2}; 0\right) \cup$$

$$\cup [0; 1 + \sqrt{a+1}] = \left[-\frac{a}{2}; 1 + \sqrt{a+1}\right].$$

УПРАЖНЕНИЯ

15.1. Решить уравнения:

$$\text{а) } (a+1)x^2 - (a-1)x - 2a = 0; \quad \text{б) } \frac{1}{x-a} + \frac{1}{ax} = 1.$$

15.2. Сколько решений (при различных значениях a) имеют следующие уравнения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x^2 - a^2x + a = 0; & \text{б) } |x + 1/x - 3| = a - 3; \\ \text{в) } |a^{2x} + a^{x+2} - 1| = 1; & \text{г) } 2[x] = x + a? \end{array}$$

15.3. Решить уравнения:

$$\text{а) } \sqrt{x+a} = \sqrt{x} + \sqrt{a};$$

$$\text{б) } \sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b-2x};$$

$$\text{в) } \sqrt{x-2a} - \sqrt{x-2b} = 2;$$

$$\text{г) } \sqrt{x - \sqrt{x-a}} = a;$$

$$\text{д) } \sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x.$$

15.4. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a, \\ x_3 - x_4 = b, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение в положительных числах x_1, x_2, x_3, x_4 тогда и только тогда, когда $|a| + |b| < 1$.

§ 16. Графический метод

Предыдущий параграф вас убедил, по-видимому, в том, что дать полное решение уравнения или неравенства с параметром не так-то просто. Особенно трудно уследить за изменением характера ответа при изменении параметра. На помощь здесь могут прийти те графические методы в решении неравенств с двумя переменными, которые мы развивали в § 14.

Представим себе, что в связи с некоторой функцией $z = x^2 + x + a - 2$ двух переменных x и a у нас стоит ряд задач.

1) При каких значениях a уравнение $z = 0$ имеет вещественные корни?

2) При каких значениях a вещественные корни уравнения $z = 0$ имеют разные знаки?

3) При каких значениях a в интервале $|x| \leq 2$ лежит ровно один корень уравнения $z = 0$?

4) При каких значениях a неравенство $z > 0$ выполняется при всех $x > 2$?

5) При каких значениях a неравенство $\sin^2 y + \sin y + a - 2 > 0$ не имеет решений?

6) При каких значениях a неравенство $z < 0$ имеет хотя бы одно решение $x \in [-2; -1]$?

Можно каждый из этих вопросов исследовать отдельно. Мы предложим способ, позволяющий сравнительно легко ответить на них и на многие другие вопросы такого же типа.

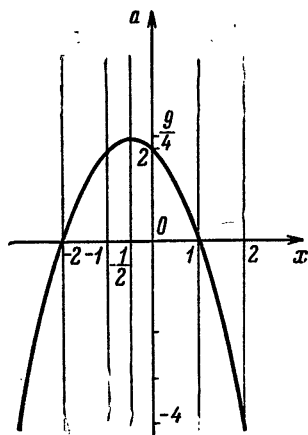


Рис. 39.

Нарисуем на плоскости (x, a) линию, задаваемую уравнением $z(x, a) = 0$. Для этого из уравнения $z = 0$ выразим a как функцию от x : $a = -x^2 - x + 2$, и построим график этой функции (рис. 39). Это — парабола. Ее вершина находится в точке $(-1/2; 9/4)$, ось x пересекает ее в точках $(-2; 0)$ и $(1; 0)$, а ось a — в точке $(0; 2)$.

Рассмотрим знак функции $z(x, a)$ в зависимости от значений x и a . В начале координат $z(0; 0) = -2 < 0$. Итак, на параболе $z = 0$, между ее ветвями $z < 0$, а в остальной части плоскости $z > 0$.

Как увидеть корни уравнения $z = 0$ при фиксированном a ? Надо провести через точку $(0; a)$ прямую, параллельную оси x , и найти точки пересечения ее с параболой.

Теперь легко ответить на первые три вопроса:

- 1) Корни вещественны при $a \leq 9/4$.
- 2) Корни разных знаков при $a < 2$.

3) В интервале $|x| \leq 2$ корень ровно один при $-4 \leq a < 0$ и при $a = 9/4$.

Столь же легко ответить и на вопросы, связанные с решением неравенств:

4) Интервал $(2; +\infty)$ целиком попадает в область решений неравенства $z > 0$ при $a \geq -4$.

5) Этот вопрос сводится к такому: при каких значениях a неравенство $z > 0$ не имеет решений среди чисел x таких, что $|x| \leq 1$? Из чертежа видно, что это происходит при $a \leq 0$.

6) Отметив пересечение полосы $-1 < x < -2$ и области $z < 0$, видим, что решения существуют при $a < 2$.

Вернемся к решениям задач предыдущего параграфа. Нетрудно дать им графическую иллюстрацию.

Для исследования уравнения $ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0$ построим график функции $a = \frac{-2x}{x^2 + 2x + 2}$ (рис. 40). (Это можно сделать по точкам или пользуясь методами книжки «Функции и графики» из нашей серии.) Внешний вид

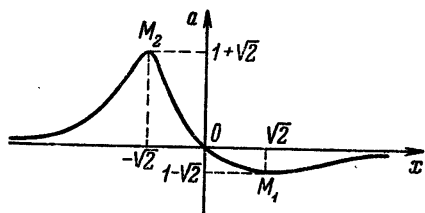


Рис. 40.

графика указать нетрудно. Самое главное — найти «горбы», т. е. координаты точек M_1 и M_2 . Для этого достаточно решить относительно x исходное квадратное уравнение: ясно, что искомые координаты (x_1, a_1) и (x_2, a_2) точек M_1 и M_2 — это крайние значения a , при которых уравнение имеет вещественные корни. Мы уже нашли их раньше: $a_1 = 1 - \sqrt{2}$, $a_2 = 1 + \sqrt{2}$; соответственно $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

Теперь, глядя на этот график, мы можем ответить на многие вопросы, связанные с поведением корней нашего уравнения. Попробуйте ответить, например, на такие вопросы:

1) При каких значениях a уравнение имеет два вещественных корня, по модулю меньших трех?

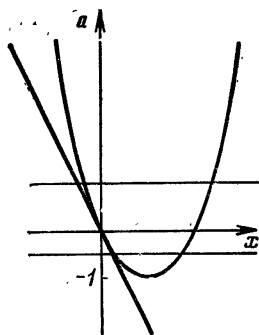
2) При каких значениях a больший из двух вещественных корней по модулю больше двух?

Особенно полезно сочетать формальные приемы в решении уравнений и неравенств с графическими. Так, например, в решении неравенства из предыдущего параграфа трудности начались тогда, когда надо было сравнивать все полученные условия; графическая иллюстрация помогает преодолеть все эти трудности и не запутаться в многочисленных *и, или, если..., то...*, связывающих неравенства.

Напомним, что мы, решая неравенство

$$\sqrt{2x+a} \geq x,$$

пришли к двум случаям; решение нашего неравенства — множество точек (x, a) , для которых



$$\begin{cases} x < 0, \\ x \geq -a/2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 2x - a \leq 0. \\ x \geq -a/2. \end{cases}$$

Теперь на плоскости (x, a) нарисовать графики функций $a = -2x$ и $a = x^2 - 2x$ (рис. 41). Чтобы найти точки пересечения параболы и прямой, решаем уравнения

$$x^2 - 2x = -2x \Leftrightarrow x = 0.$$

Рис. 41.

В левой полуплоскости ($x < 0$) надо взять точки, лежащие выше прямой (и на самой прямой), так как $x \geq -a/2$.

В правой полуплоскости ($x \geq 0$) надо взять точки, лежащие между ветвями параболы, поскольку

$$a \geq x^2 - 2x$$

$$\Updownarrow$$

$$1 - \sqrt{a+1} < x < 1 + \sqrt{a+1}, \quad a \geq -1.$$

Теперь легко записать ответ при каждом a .

Если: $a < -1 \Rightarrow$ решений нет;

$$-1 \leq a \leq 0 \Rightarrow X = [1 - \sqrt{a+1}; 1 + \sqrt{a+1});$$

$$0 \leq a \Rightarrow X = [-a/2; 1 + \sqrt{a+1}].$$

В практических задачах часто нужно не просто найти все решения уравнения или неравенства, а требуется еще выбрать из этих решений самое выгодное.

Задача. На двух шахтах добывается руда: на первой — 100 т в день, на второй — 200 т в день. Эту руду можно перерабатывать на двух заводах, причем стоимость перевозок (в условных единицах) одной тонны руды видна из таблицы:

	1-й завод	2-й завод
1-я шахта	5	4
2-я шахта	7	5

Известно, что каждый завод может переработать не более 250 т руды. Сколько руды нужно возить с каждой шахты на каждый завод, чтобы стоимость перевозок была наименьшей?

Пусть x — количество руды, перевозимой в день с 1-й шахты на 1-й завод, y — количество руды, перевозимой в день со 2-й шахты на 1-й завод; тогда $(100 - x)$ — количество руды, перевозимой в день с 1-й шахты на 2-й завод, $(200 - y)$ — количество руды, перевозимой в день со 2-й шахты на 2-й завод.

Тогда ограничения на x и y , налагаемые условиями задачи, записываются в таком виде:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 250, \\ x + y \geq 50, \\ x \leq 100, \\ y \leq 200 \end{cases} \quad (1)$$

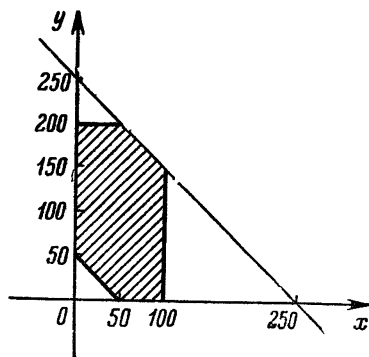


Рис. 42.

(обязательно разберитесь, откуда взялось каждое неравенство!).

Затраты на перевозку составляют

$$5x + 7y + 4(100 - x) + 5(200 - y) = x + 2y + 1400.$$

Решения системы неравенств (1) заполняют выпуклый шестиугольник на плоскости (x, y) (рис. 42).

Это тоже нетрудно сделать с помощью графиков. Мы знаем, что множество точек, где $x + 2y = c$, — прямая линия. На рис. 43 начерчено несколько таких прямых,

Это тоже нетрудно сделать с помощью графиков. Мы знаем, что множество точек, где $x + 2y = c$, — прямая линия. На рис. 43 начерчено несколько таких прямых,



Итак, самый выгодный план перевозок таков:

Задача, которую мы решили,— типичная задача линейного программирования. В общем виде она выглядит так:

[illegible]

Из всех решений системы нужно выбрать такое, для которого данная линейная функция $y = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ принимает наименьшее значение.

К такой задаче сводится значительная часть расчетов в экономике, связанных с нахождением оптимальных (наилучших) планов и т. д. Конечно, в реальных задачах число аргументов n и число уравнений m бывают огромными: порядка нескольких десятков и сотен. В нашей задаче $n = 2$, поэтому мы смогли решить ее с помощью геометрии. В случае большего количества аргументов для решения этой задачи требуется огромное количество вычислений, так что невозможно обойтись без современных электронно-вычислительных машин. Такая задача была одной из первых, для решения которой составлялись специальные программы, откуда и возникло название «линейное программирование».

УПРАЖНЕНИЯ

16.1. Решить уравнения:

а) $|x - a| + |x + a + 1| = 3$;

б) $x + \sqrt{x(a-x)} = 1 \quad (a > 0)$;

в) $(\sqrt{a-x^2} - 1/2)^2 = x^2 - x + 1/4$.

16.2. Решите неравенства и (если сможете) изобразите ответ графически:

а) $(a + 1)x > 3a - 1$;

б) $\frac{a}{ax - a - 1} \leq 2$;

в) $\frac{ax + 1}{ax - 1} \geq \frac{a + 1}{a - 1}$;

г) $\sqrt{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}} \leq \sqrt{2}$;

д) $\sqrt{2ax + 1} \geq x - 1$;

е) $\sqrt{x + a} \geq x + 1$;

ж) $\log_x (x - a) > 2$;

з) $\cos x - 1/\cos x \leq a$.

16.3. Будем рассматривать квадратные уравнения вида $x^2 + px + q = 0$; каждое такое уравнение задается двумя числами p и q . Условимся изображать его точкой на плоскости с координатами (p, q) . Например, уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$ изображается точкой $(-2; 3)$, уравнение $x^2 - 1 = 0$ — точкой $(0; -1)$.

а) Какое уравнение соответствует началу координат?

б) Какую часть плоскости «занимают» уравнения, не имеющие вещественных корней? На какой линии расположены точки, соответствующие уравнениям, имеющим один кратный вещественный корень?

в) Нарисуйте множество точек, соответствующих тем уравнениям, у которых корни вещественны и сумма корней равна 2.

г) Какое множество точек соответствует тем уравнениям, у которых корни вещественны и положительны? вещественны и отрицательны?

д) Какой точкой может изображаться уравнение, если известно, что один из его корней равен 1?

е) Какой точкой может изображаться уравнение, у которого оба корня вещественны и по модулю не превосходят 1?

16.4. Изобразить на плоскости (a, b) те точки, для которых уравнение $\sqrt{x+a+b} - \sqrt{x+b} = 1$

а) имеет хотя бы один (вещественный) корень;

б) не имеет вещественных корней;

в) имеет положительный корень;

г) имеет корень, меньший чем -2 .

16.5. Среди решений системы неравенств

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3, \\ 2x - y \leq 1, \\ x \geq 0, \\ y \leq 0 \end{cases}$$

выбрать такое, для которого $x^2 + y^2$ максимально.

16.6. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - \sin^2 y = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

16.7. При каких значениях a всякое решение неравенства $x^2 - x - 2 < 0$ больше какого-нибудь решения неравенства $ax^2 - 4x - 1 \geq 0$?

16.8. Найти все такие значения a , что при любом b найдется такое c , что система

$$\begin{cases} bx - y = ac^2, \\ (b - 6)x + 2by = c + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

КРАТКИЕ ИТОГИ

Основные понятия

1. *Числовое равенство (числовое неравенство)* — это высказывание вида $a = b$ ($a > b$, $a \geq b$), где a и b — числа.

2. *Уравнение (условное неравенство)* — это переменное высказывание вида $f(x) = g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, где f и g — функции.

3. *Область определения уравнения (неравенства)* — множество значений аргумента, при которых определены все функции, входящие в уравнение (неравенство).

4. *Решение, или корень, уравнения (неравенства)* — значение аргумента, при подстановке которого получается верное равенство (верное числовое неравенство).

5. *Решить уравнение (неравенство)* — найти множество его решений.

6. *Уравнения (неравенства) равносильны* — это значит, что множества их решений совпадают.

Советы

1. Процесс решения уравнения состоит обычно в получении цепочки следствий — уравнений, множества решений которых содержат множества решений предыдущих. Получив в качестве следствия уравнение, множество решений которого нам известно, можно либо сделать проверку, либо проследить за равносильностью переходов. Так же решают и системы уравнений.

2. При решении неравенств и доказательстве тождеств нужно пользоваться равносильными переходами.

3. Переход с помощью некоторой операции от одного неравенства (уравнения) к другому заведомо является равносильным, если для этой операции имеется «обратная».

Например, можно обе части умножить на положительную функцию, прибавить к ним любую функцию, применить некоторую монотонно возрастающую функцию.

4. Решение следует начинать с того, что выписать все ограничения на область определения.

5. Преобразуя одну часть уравнения (неравенства) или переходя от одного уравнения (неравенства) к другому, нужно обязательно следить за тем, чтобы выполняемые операции имели смысл при всех значениях переменных из области определения.

6. Иногда полезно рассмотреть несколько «случаев»: разбить области определения на несколько множеств, на каждом из которых удобно совершить переход к более простому уравнению (неравенству).

7. Если нужно найти множество точек, удовлетворяющих одновременно нескольким условиям, записываемым уравнениями, неравенствами и т. п. (решить систему), то надо взять пересечение множеств точек, удовлетворяющих отдельным условиям.

Если нужно найти множество точек, удовлетворяющих хотя бы одному из нескольких условий (рассмотреть несколько возможных случаев), то надо взять объединение множеств точек, удовлетворяющих отдельным условиям.

8. Очень часто, особенно при решении неравенств и при необходимости перебирать много частных случаев, помогают графические иллюстрации.

9. При решении уравнений и неравенств с параметром надо в ответе перечислить решения при всех значениях параметра.

10. Несколько советов по поводу решения задач на составление уравнений (с параметрами): не забудьте выписать все условия и ограничения; получив ответ, проверьте, все ли слагаемые в сумме имеют одинаковую размерность (нельзя, например, складывать длину и скорость); проверьте ответ в каком-либо простом частном случае; подставьте простое численное значение параметра и посмотрите, правдоподобный ли получился результат.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава I

3.1. Может. Например, если $f_1(x) = |x - 1/2| - x + 1/2$,
 $f_2(x) = |x - 1/2| + x + 1/2$, то $f_1(x) f_2(x) = 0$ при всех x .

3.2. б) (0; 2).

Глава II

4.4. г) Можно воспользоваться тождеством

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac).$$

$$е) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(a+b+c)}.$$

5.1. б) Да. 5.3. в) Пустое множество.

6.5. в) Воспользуйтесь тождеством

$$\left(\frac{x}{y-x} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} \right) \left(\frac{1}{y-x} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y} \right) = \\ = \frac{x}{(y-x)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2}.$$

7.1. а) Да; оба имеют один корень $x = -1$. б) Нет: $x = -2$ является корнем первого уравнения и не является корнем второго.

7.2. Нет. 7.4. в) $X = \emptyset$ (в соответствии с нашей договоренностью это означает, что множество решений уравнения пусто).

7.5. б) $X = \{3\}$. в) $||x| - 4| - 3|$ равно 1 или 3, поэтому $||x| - 4|$ равно 0, 2, 4 или 6, и т. д.

8.1. д) Слева стоит сумма взаимно обратных величин. е) В левой части освободиться от иррациональности в знаменателе. з) $X = [5; 10]$. р) Сделать замену $1/x - x/2 = y$.

8.2. Расположить $P(x)$ по степеням $x - 7$.

8.3. г) $x^4 - 5x^2 - 2x + 3 = (x^2 - x - 3)(x^2 + x - 1)$.

8.5. б) $a = n - 1$; $b = n$.

9.2. б) $X = \{-5/2, -3/2, 3/2, 5/2\}$. 9.6. а) $X = \{1\}$; б) $X = \{2\}$.

10.1. в) Рассмотреть обратные дроби и получить систему линейных уравнений относительно $1/x, 1/y, 1/z$. д) Первое уравнение решается относительно $\sqrt[3]{(x+y)/(x-y)}$. и) Ввести новые неизвестные: $z = |x-1|$, $t = y-5$. м) Рассмотреть как систему относительно xy и $x-y$. н) Сложить и вычесть уравнения друг из друга.

Глава III

11.1. г) Неверно. 12.1. а) Да. б) Нет. Равносильность сохранится, если во втором неравенстве оставить ту же область определения, которая была в первом: $x \geq 1$.

13.1. а) Лучше переписать неравенство так: $|x + 1| > |3 - 2x|$.

13.2. д) $[1/4, 5/16] \cup [13/16, +\infty)$. е) Сделать замену $y = \sqrt{x}$.

13.4. е) Доказывать методом математической индукции. Неравенство верно (или превращается в верное равенство) при $n = 1$.

15.1. б) Если $a \neq 0$,

$$X = \{(a + 2 - \sqrt{a^2 + 4})/2; (a + 2 + \sqrt{a^2 + 4})/2\};$$

если $a = 0$, $X = \{2\}$.

15.2. б) Если: $a < 3$, решений нет;

$a = 3$, 2 корня;

$3 < a < 4$, 4 корня;

$a = 4$, 3 корня;

$4 < a < 8$, 2 корня;

$a = 8$, 3 корня;

$a > 8$, 4 корня.

15.3. г) При $a < 0$ решений нет;

при $0 \leq a \leq 1$ $X = \{a^2 + a, a^2 - a + 1\}$

(заметим, что при $a = \frac{1}{2}$ корни сливаются в один); при $a > 1$ $X = \{a^2 + a\}$.

16.1. в) Если:

$a > 0$, $X = \emptyset$;

$0 \leq a \leq 1/2$, $X = \{\sqrt{a/2}\}$;

$1/2 < a \leq 1$, $X = \{\sqrt{a/2}, (1 - \sqrt{2a-1})/2, (1 + \sqrt{2a-1})/2\}$;

$a > 1$, $X = \{\sqrt{a/2}, (1 - \sqrt{2a-1})/2\}$.

16.2. г) Если:

$a < 0$, решений нет;

$0 \leq a < 1/2$, $X = [0; a^2]$;

$1/2 \leq a \leq 1$, $X = [2a-1, a^2]$;

$a > 1$, $X = \emptyset$.

ж) Если:

$a < 0$, $X = (1, (1 + \sqrt{1-4a})/2)$;

$a = 0$, $X = \emptyset$;

$0 < a \leq 1/4$, $X = (a, (1 - \sqrt{1-4a})/2) \cup ((1 + \sqrt{1-4a})/2, 1)$;

$1/4 < a < 1$, $X = (a, 1)$;

$a \geq 1$, $X = \emptyset$.

16.6. При $a = 9$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Введение	5
§ 1. Числа	5
§ 2. Высказывания	12
§ 3. Функции	16
Глава II. Уравнения	20
§ 4. Числовые равенства	20
§ 5. Уравнения	23
§ 6. Связь между уравнениями	27
§ 7. Равносильность уравнений	37
§ 8. Корни многочленов	42
§ 9. Графическое исследование уравнений	49
§ 10. Системы уравнений	55
Глава III. Неравенства	62
§ 11. Свойства неравенств	62
§ 12. Условные неравенства	64
§ 13. Неравенства с одним неизвестным	69
§ 14. Неравенства с двумя неизвестными	76
§ 15. Уравнения и неравенства с параметрами	79
§ 16. Графический метод	83
Краткие итоги	91
Ответы и указания	93

Марк
Иванович
Бащмаков

Уравнения и неравенства
М., 1971, 96 стр. с илл.

Редакторы	Г. В. Дорофеев, Г. Я. Пирогова
Художник	В. Б. Янкилевский
Техн. редактор	С. Я. Шкляр
Корректор	В. П. Сорокина

Сдано в набор	7/IX 1970 г.
Подп. к печати	7/XII 1970 г.
Бумага	84×108 ¹ / ₃₂ .
Физ. печ. л.	3.
Усл. печ. л.	5,04.
Уч.-изд. л.	4,78.
T-15531.	
Тираж	250000 экз.
Цена книги	16 коп.
Заказ	1187.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы
Москва В-71,
Ленинский проспект, 15.

2-я типография изд-ва «Наука»,
Москва Г-99, Шубинский пер., 10

Математика

Библиотечка
физико-математической школы

Серия основная

- Выпуск 1 И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. Метод координат.
- Выпуск 2 И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль. Функции и графики (основные приемы).
- Выпуск 3 С. И. Гельфанд, М. Л. Гервер, А. А. Кириллов, Н. Н. Константинов, А. Г. Кушниренко. Задачи по элементарной математике (последовательности, комбинаторика, пределы).
- Выпуск 4 Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. Прямые и кривые.
- Выпуск 5 М. И. Башмаков. Уравнения и неравенства.

Серия дополнительная

- Выпуск 1* Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго. Математические задачи.
- Выпуск 2* А. А. Кириллов. Пределы.
- Выпуск 3* Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь. Математические соревнования (арифметика и алгебра).

Цена 16 к.

Библиотечка
физико-математической школы

